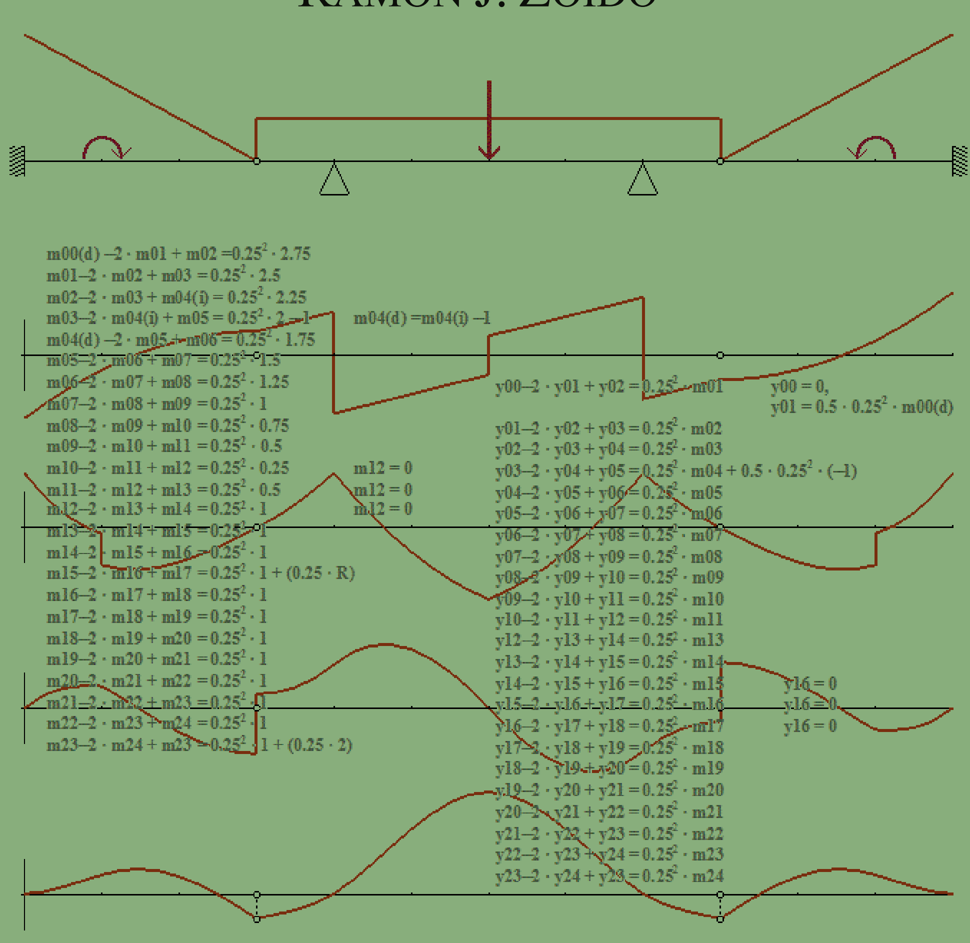
# MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE (II)

*por*


PEDRO GALÁN DEL SASTRE

RAMÓN J. ZOIDO



**CUADERNOS**

**DEL INSTITUTO**

**JUAN DE HERRERA**

**DE LA *ESCUELA DE***

***ARQUITECTURA***

***DE MADRID***

**3-53-08**

# MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE (II)

*por*

PEDRO GALÁN DEL SASTRE

RAMÓN J. ZOIDO

**CUADERNOS**

**DEL INSTITUTO**

**JUAN DE HERRERA**

**DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID***

**3-53-08**

C U A D E R N O S
D E L   I N S T I T U T O
J U A N   D E   H E R R E R A

**NUMERACIÓN**

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

**TEMAS**

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

***Métodos en diferencias finitas aplicados al análisis de la flexión simple en vigas rectas de rigidez constante (II).***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 420.01 / 3-53-08
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-492-9
ISBN-13: 978-84-9728-494-3
Depósito Legal: M-17382-2014

*El problema del análisis de la flexión simple en piezas rectas de sección constante con ciertas hipótesis complementarias y otras condiciones de forma y solicitación nos conduce a un modelo regido por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes con condiciones de contorno que puede ser reducido a un problema unidimensional definido en un intervalo. Este problema es, como se sabe, fundamental en el campo de la edificación por el predominio de estas piezas en arquitectura e ingeniería. La presencia de cargas y momentos puntuales en las solicitaciones de vigas es imprescindible para completar un modelo operativo ya que permite ampliar substancialmente el campo del análisis a vigas de varios tramos y otros problemas de interés en el contexto estructural. Pero esta presencia nos impide efectuar holgadamente integraciones "convencionales" con lo que se necesita acudir a otros procedimientos matemáticos entre los que se encuentran los métodos numéricos.*

*El método de integración por diferencias finitas es un método numérico universal y extraordinariamente eficaz que resulta una solución idónea por su simplicidad y adaptabilidad a cualquier tipo de planteamientos en este ámbito. El sistema de ecuaciones al que conduce la resolución de los problemas puede hoy día ser resuelto con gran facilidad por la mayor parte de calculadoras ordinarias y programas informáticos.*

*Después de una exposición del procedimiento con carácter general descrito sobre los casos más simples para ecuaciones de 2º y 4º orden, se ha procedido a configurar unas fórmulas de uso sistemático totalmente adaptadas a las condiciones del problema de la flexión simple en lo que hemos denominado "métodos en dos etapas" partiendo de la caracterización de las condiciones de conjugación de la unión rígida, el tratamiento de las secciones extremas y, en su caso, de la unión articulada. Con esta descripción pormenorizada puede ya procederse reiteradamente sobre las piezas de uno o varios tramos sean cuales sean sus vinculaciones de extremo. Se ha dado la mayor importancia a los ejercicios prácticos que son los que permiten comprender la metodología operativa y obtener los resultados buscados en los distintos casos comparando sus soluciones con las obtenidas por otros métodos.*

*Finalmente somos conscientes de que en un trabajo de estas características es inevitable la aparición de erratas o de falta de precisión que iremos corrigiendo en revisiones posteriores.*

Pedro Galán del Sastre
Ramón J. Zoido
Mayo 2014

# Índice general

# 2 Solicitaciones segmentariamente continuas con saltos finitos

## 2.1. La flexión simple en vigas rectas de rigidez constante

Es sabido que el análisis de la flexión simple de barras rectas de rigidez constante es fundamental en el campo de la edificación por el predominio de estas piezas en arquitectura y, en general, también en ingeniería. Aquí trataremos un conjunto de problemas que pueden ser resueltos de una manera muy simple y muy eficaz con el auxilio de métodos numéricos en diferencias. Soslayando conceptos tales como lo *isostático* o lo *hiperestático* –conceptos que, por otra parte, pueden deducirse aquí del conjunto final de ecuaciones resultante–, se procede de manera sistemática sobre todo el rango de piezas sean cuales sean sus vinculaciones de extremo aunque aquí plantearemos los casos estándar más habituales de extremos *libres*, *simplemente apoyados* o *perfectamente empotrados* y sus posibles combinaciones siempre que determinen modelos mecánicamente estables. Con el mismo tratamiento, el método se extiende a las vigas continuas –incluyendo los apoyos interiores rígidos– y las compuestas –incluyendo las articulaciones internas–.

Las vigas que vamos a considerar aquí son piezas horizontales de directriz recta –eje $OX$ longitudinal– y sección transversal constante con un eje de simetría –paralelo al $OY$–. Si la longitud de esta pieza $l$ resulta ser una magnitud mucho mayor que las dimensiones de la sección, podemos considerar que la flexión queda definida por la deformación de la sección longitudinal media de la viga, en el plano de la directriz $OXY$ –plano de simetría de la viga– cargada verticalmente en este plano con una ley de cargas cuya variación viene descrita por la función $w(x)$. Admitiremos además, por una parte, la hipótesis de existencia de fibra neutra –fibra longitudinal sin extensión ni contracción– y, por otra, consideraremos que las secciones transversales inicialmente planas y perpendiculares a la línea neutra lo siguen siendo después de la deformación (Bernouilli-Navier). Esta última hipótesis desprecia en la flexión el alabeo de la sección producida por el esfuerzo de corte. Básicamente con estas hipótesis y estableciendo el origen en el extremo izquierdo de la pieza, el problema de la deformación puede ser reducido a un problema unidimensional definido en el intervalo $[0, l]$ (figura 2.1). Los esfuerzos se limitan a los *momentos flectores* y a los *esfuerzos de corte* o *cortantes* en tanto que las deformaciones se reducen al desplazamiento vertical –*flechas*– y al giro de cada sección respecto de su posición inicial –*giros*–. Es muy significativo el modelo de secciones transversales rectangulares. Siendo el "ancho" de cada sección transversal una magnitud pequeña, podemos considerar que todas las secciones longitudinales se comportan idénticamente en la deformación. La deformada de la línea neutra $y(x)$ que, en estas condiciones, domina el problema de la deformación, se denomina *curva elástica*. Las secciones

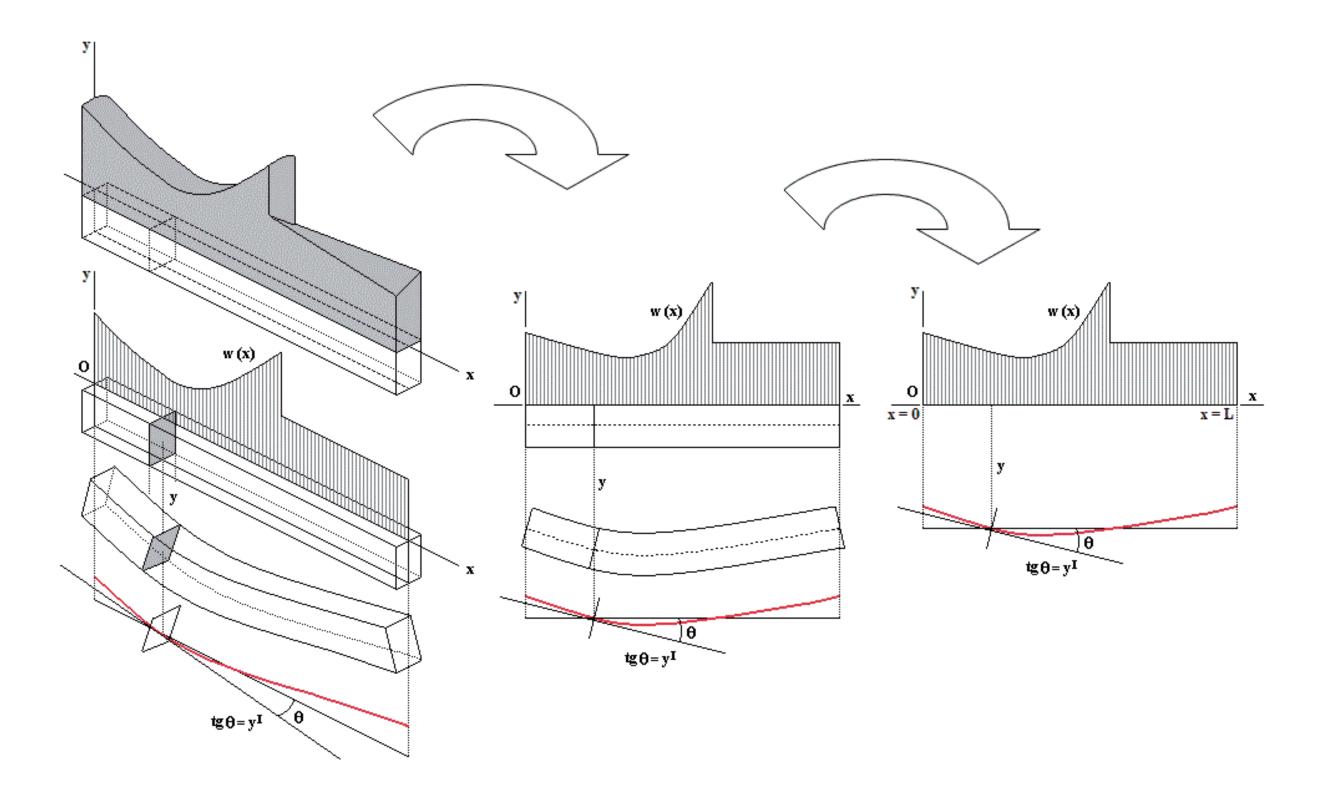



Figura 2.1: Reducción de dimensión del problema de la deformación.

transversales permanecen perpendiculares a esta línea y su giro puede ser determinado por el ángulo que forma la recta tangente a esta curva con la horizontal que es la posición de la fibra neutra antes de la deformación. Esta curva deformada viene regida por la ecuación

$$y'' = \frac{m}{B}\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{2.1}$$

donde $m = m(x)$ es el ***momento flector*** que solicita la pieza y que puede ser descrito físicamente en un punto de la barra como el momento –de primer orden– de las fuerzas situadas a la izquierda del punto incluyendo las de reacción de su extremo izquierdo –reacciones y momentos– si las hay. A su vez $B$ factor de *rigidez* a flexión de la viga es igual al producto $EI$ donde $E$ es el *módulo de elasticidad de Young* que depende del tipo de material y que supondremos constante a lo largo de la pieza e $I = I_z$ es el momento de inercia de la sección respecto de un eje normal al plano de la directriz por el centro de gravedad de la misma. La ecuación (2.1) es válida en el caso más general de vigas de *sección variable* $B = B(x)$ a lo largo del eje longitudinal y manifiesta simplemente la relación de proporcionalidad local entre la curvatura de la curva elástica y los momentos flectores siendo justamente el factor de proporcionalidad el valor $B$ de la rigidez a flexión.

El dimensionado de la pieza y las limitaciones en la ley de cargas en cada caso garantizan que la función $y(x)$, solución de esta ecuación de campo más las condiciones de extremo, es continua en el intervalo $(0, l)$ y es al menos de clase uno si no existen en dicho intervalo articulaciones internas que conviertan a estas piezas en *vigas compuestas.* Una discontinuidad "natural" en la primera derivada de la viga supondría una fisura semejante a una rótula y, en cierto modo, su alejamiento del rango elástico de respuesta o incluso su alejamiento del

comportamiento de *viga* pudiendo transformarse en un mecanismo.

Si consideraremos que en la deformación los giros resultantes de las secciones son pequeños podemos trabajar con un modelo lineal aproximado para la ecuación de campo ya que siendo $y'$ pequeño, el valor $y'^2$ puede ser depreciado. Esta hipótesis es plausible toda vez que giros importantes de las secciones serían inviables con los materiales utilizados usualmente y mecánicamente constituirían otra respuesta diferente de la flexión simple por lo que deberían ser abordados con otros procedimientos. La consideración $1+y'^2 \simeq 1$ es, por otra parte, consistente con la propia hipótesis de la existencia de la fibra neutra –fibra sin alargamiento ni contracción– ya que este factor es justamente el cuadrado del integrando que determina la longitud de la curva elástica. Finalmente esta hipótesis es congruente con los resultados experimentales obtenidos para las piezas que habitualmente se utilizan en construcción.

Con esta hipótesis adicional la ecuación de campo que rige la flexión simple de las vigas rectas en el modelo lineal correspondiente resulta ser simplemente:

$$y''(x) = \frac{m(x)}{B(x)}.$$

Si consideramos, además, vigas de inercia constante, $I_z = cte$, y con el módulo de elasticidad de Young constante, $E = cte$, el modelo lineal satisface la ecuación

$$y''(x) = \frac{m(x)}{B},$$

con $B = EI = cte$, y constituirá la ecuación de campo de las vigas de sección –o rigidez– constante.

En estas condiciones, la derivación de esta ecuación nos lleva a

$$y'''(x) = \frac{t(x)}{B}$$

donde $t(x)$ es el ***esfuerzo de corte*** o ***cortante***, y una nueva derivación

$$y^{iv}(x) = \frac{w(x)}{B} \tag{2.2}$$

donde $w(x)$ es la ***ley de cargas*** que solicita la pieza a lo largo del intervalo $[0, l]$.

La ecuación (2.2) es la ecuación diferencial de la curva que representa los descensos de cada una de las secciones transversales de la pieza en las condiciones señaladas y resulta ser una ecuación de cuarto orden lineal cuya simplicidad dependerá de la función $w(x)$ del segundo miembro. Si podemos integrar directamente esta ecuación para obtener $y(x)$, flecha o desplazamiento de cada sección, entonces podemos completar la deformación de la viga obteniendo por derivación en primer lugar

$$y'(x) = \text{tg}\theta(x) \simeq \theta(x),$$

giro de cada una de las secciones transversales en cada punto de la viga, mientras que las siguientes derivadas nos proporcionarán los esfuerzos de flexión y corte:

$$\begin{aligned} By''(x) &= m(x), && \text{momento flector,} \\ By'''(x) &= t(x), && \text{esfuerzo cortante.} \end{aligned}$$

## 2.2. Las leyes de cargas $w(x)$

Consideraremos aquí tres tipos de acciones verticales que representarán un amplio rango de solicitaciones generales:

a. Una distribución de cargas verticales definida por una función segmentariamente continua con un número finito de discontinuidades de primera especie –saltos finitos– en el intervalo.

b. Un número finito de cargas concentradas en distintos puntos del intervalo o cargas “puntuales”.

c. Un número finito de momentos de flexión aislados definidos en distintos puntos del intervalo.

Cuando trabajamos solamente con el primer conjunto “a” de cargas, podremos abordar directamente la ecuación de cuarto orden y realizar hasta donde nos sea posible el cálculo discreto de las funciones de deformación y esfuerzo en lo que denominaremos *método de una etapa* en el cual básicamente obtenemos por métodos en diferencias las flechas de la viga aproximando la integración de la derivada de orden cuatro y de ahí reconstruimos por derivación el resto de las funciones –giros y funciones de esfuerzo–. La consideración del segundo y tercer grupo “b” y “c”, nos lleva preferentemente a articular los *métodos en dos etapas* con la introducción de las cargas concentradas y los momentos aislados a través de las condiciones de conjugación de la unión rígida y el replanteamiento de las condiciones de los extremos estándar. La presencia de estos dos grupos de cargas “b” y “c” nos permitirá, además, extender estos métodos a las vigas de varios tramos.

## 2.3. Condiciones de contorno. Aproximación de las condiciones de contorno en ausencia de cargas concentradas y momentos aislados

La descripción pormenorizada de la caracterización de los vínculos extremos en las vigas cae dentro del análisis del grado de empotramiento de las estructuras pero aquí consideraremos un conjunto de condiciones de frontera estándar, idealizadas desde el punto de vista estructural, que pueden caracterizarse de forma muy simple pero que permiten completar modelos de magníficos resultados con respecto al comportamiento real. En ausencia de cargas puntuales y momentos aislados en los extremos serán las siguientes:

a. Extremo libre: caracterizado por la anulación de las derivada segunda –momento flector nulo, giro libre– y tercera –cortante nulo–.

b. Extremo simplemente apoyado: caracterizado por la anulación de la flecha –apoyo rígido, no hay descenso– y de la derivada segunda –momento flector nulo, giro libre sin restricciones angulares–.

| tipo de viga | extremo izquierdo | | extremo derecho | |
|---|---|---|---|---|
| ménsula empotrada en su extremo izquierdo | $y\,(0) = 0$ | $y'\,(0) = 0$ | $y''\,(l) = 0$ | $y'''\,(l) = 0$ |
| ménsula empotrada en su extremo derecho | $y''\,(0) = 0$ | $y'''\,(0) = 0$ | $y\,(l) = 0$ | $y'\,(l) = 0$ |
| viga doblemente apoyada | $y\,(0) = 0$ | $y''\,(0) = 0$ | $y\,(l) = 0$ | $y''\,(l) = 0$ |
| viga empotrada-apoyada | $y\,(0) = 0$ | $y'\,(0) = 0$ | $y\,(l) = 0$ | $y''\,(l) = 0$ |
| viga apoyada-empotrada | $y\,(0) = 0$ | $y''\,(0) = 0$ | $y\,(l) = 0$ | $y'\,(l) = 0$ |
| viga doblemente empotrada | $y\,(0) = 0$ | $y'\,(0) = 0$ | $y\,(l) = 0$ | $y'\,(l) = 0$ |

Tabla 2.1: Leyes de cargas segmentariamente continuas sin acciones aisladas en los extremos.

c. Extremo perfectamente empotrado: caracterizado por la anulación de la flecha –empotramiento rígido, no hay descenso– y de la derivada primera –giro nulo de la sección de empotramiento, la recta tangente a la curva elástica es horizontal–.

Las configuraciones resultantes de combinar estas tres condiciones de extremo en un solo tramo de manera que sean mecánicamente estables y que proporcionen reacciones resistentes de viga, conducen a los seis modelos de sustentación que se muestran en la tabla 2.1. A la derecha de cada uno de los seis modelos se representan sus características en términos de los valores de la curva elástica o de sus derivadas. Estas condiciones son válidas en ausencia de cargas concentradas y momentos aislados en los extremos. Cuando, además, se consideren solicitaciones puntuales en estos extremos –idealmente representadas en los esquemas

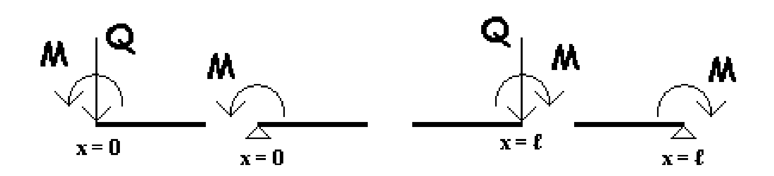



Figura 2.2

| **vínculos** | **condiciones de extremo** | |
|---|---|---|
| empotramiento perfecto<br>-1 0 1 2 | $y_0 = 0$<br>$\dfrac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$ | $y_0 = 0$<br>$y_{-1} = y_1$ |
| apoyo rígido<br>-1 0 1 2 | $y_0 = 0$<br>$\dfrac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} = 0$ | $y_0 = 0$<br>$y_{-1} = -y_1$ |
| extremo libre<br>-2 -1 0 1 2 | $\dfrac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} = 0$<br>$\dfrac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2h^3} = 0$ | $y_{-1} = 2y_0 - y_1$<br>$y_{-2} = 4y_0 - 4y_1 + y_2$ |

Tabla 2.2: Solicitaciones segmentariamente continuas sin acciones aisladas en los extremos.

de la figura 2.2, o sea: cargas concentradas en bordes libres y/o momentos aislados sobre bordes libres o apoyos rígidos–, las condiciones de la tabla deberán ser convenientemente modificadas. La introducción de este tipo de solicitaciones se verá en el § 3.

En el caso en que las solicitaciones no incluyan cargas concentradas ni momentos aislados entonces teniendo en cuenta las aproximaciones $O\left(h^2\right)$ que venimos considerando, las condiciones de extremo estándar de la tabla 2.1 que vienen descritas en términos de derivadas permiten asignar a los puntos "ficticios" ciertos valores de la función buscada respecto de los que toma la función en los nodos del interior del intervalo más próximos al contorno.

Tomando el extremo izquierdo $x_0 = 0$ y dos nodos interiores $x_1$ y $x_2$ como referencia, se muestran en la tabla 2.2 las condiciones de extremo y los valores que se deben de asignar a los puntos ficticios $x_{-1}$ y, en su caso, $x_{-2}$ según las condiciones del vínculo respecto a los valores de los puntos interiores próximos al punto frontera $x_0$. Estas condiciones se completan en la tabla con $y_0 = 0$, descenso nulo en apoyos rígidos y empotramientos perfectos.

## 2.4. Métodos de una etapa. Ejemplos

En ausencia de cargas concentradas y momentos aislados se puede abordar directamente la ecuación de cuarto orden (2.2). Aproximaremos la integración de la ecuación (2.2) más las condiciones en los extremos teniendo en cuenta el factor de escala $B = cte$ que debe reducir (por división) los resultados de esta integración directa para los valores de las flechas y giros en tanto se conservan los resultados sin reducción de escala en las funciones de esfuerzos. El procedimiento en diferencias para este tipo de ecuaciones ha sido descrito ya en § 1.

Los siguientes ejemplos ilustran cada uno de los seis casos de la tabla 2.1 sometidos a leyes de cargas representativas más o menos asimilables a tipos de cargas reales que pueden solicitar las piezas. En todos los casos haremos coincidir las posibles discontinuidades sobre los nodos de la red y, en su caso, cuando haya que evaluar la ley de cargas en los extremos será a la derecha o la izquierda del nodo extremo siempre del lado interior del intervalo. En cada

uno de ellos, obtendremos los diferentes conjuntos de soluciones discretas sobre tres redes progresivamente más finas de pasos $h = 1$ m, $h = 0.5$ m y $h = 0.25$ m y los compararemos con los resultados exactos calculados por métodos continuos. Obtenida la proyección discreta de los descensos o flechas de las secciones para $h = 0.25$ m, reconstruiremos a partir de estos valores, por derivación, sus giros y los valores de las funciones de esfuerzo completando así el análisis de cada una de las vigas.

## 2.4.1. Ménsula empotrada en su extremo izquierdo.

Se considera la viga de 4 m en ménsula –empotrada-libre– con sobrecargas uniformes definidas en la forma:

$$w(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 < x < 2, \\ -1, & \text{si } 2 < x < 4, \end{cases}$$

tal y como muestra la figura 2.3(a).

Estableceremos en primer lugar una red discreta de paso $h = 1$ m y enumeraremos los nodos en la forma que se representa en la figura 2.3(b). Aplicando la ecuación de campo, con $h = 1$, sobre cada nodo interior (o extremo) y teniendo en cuenta los valores de los nodos

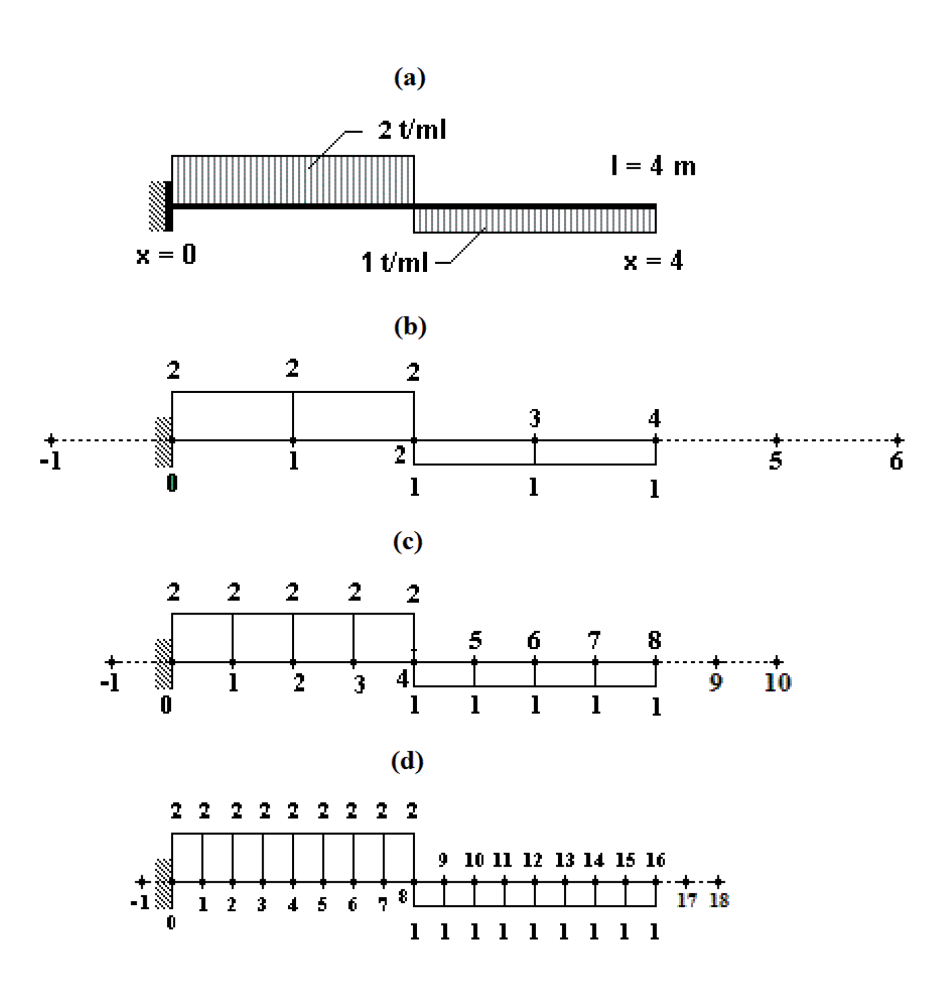



Figura 2.3

exteriores asignados a través de las condiciones frontera, el sistema de ecuaciones resultantes será:

$$\begin{array}{rcll}
y_{-1}-4y_0+6y_1-4y_2+y_3 &=& 2, & \text{con } y_{-1}=y_1,\ y_0=0\\
y_0-4y_1+6y_2-4y_3+y_4 &=& 0.5, & \text{con } y_0=0\\
y_1-4y_2+6y_3-4y_4+y_5 &=& -1, & \text{con } y_5=2y_4-y_3\\
y_2-4y_3+6y_4-4y_5+y_6 &=& -1, & \text{con } y_5=2y_4-y_3,\ y_6=4y_4-4y_3+y_2
\end{array}$$

que matricialmente se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 0\\ -4 & 6 & -4 & 1\\ 1 & -4 & 5 & -2\\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ 0.5\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

y cuya solución es

$$\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.0\\ -1.0\\ -5.0\\ -11.0\\ -17.5\end{pmatrix}.$$

Como ya vimos en § 1, podemos escribir el sistema de forma matricial para un valor de $h$ genérico, lo que nos permitirá resolver para cualquier valor de $h$:

$$\frac{1}{h^4}\begin{pmatrix}
7 & -4 & 1 & & & & & & & \\
-4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
 & & & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\
 & & & & & & 2 & -4 & 2
\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_i\\ \vdots\\ y_{N-2}\\ y_{N-1}\\ y_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w(x_1)\\ w(x_2)\\ w(x_3)\\ \vdots\\ w(x_i)\\ \vdots\\ w(x_{N-2})\\ w(x_{N-1})\\ w(x_N)\end{pmatrix}.$$

De esta forma, para obtener una mejor aproximación, consideraremos ahora una red de paso $h=0.5$ sobre la notación de la figura 2.3(c), y otra de paso $h=0.25$ –figura 2.3(d)–. Los resultados obtenidos para los distintos valores de $h$ pueden ser comparados entre si y con los valores exactos obtenidos por métodos continuos en la tabla 2.3. Las poligonales asociadas a los valores discretos pueden compararse con los exactos en la figura 2.4.

Eligiendo los resultados de mejor aproximación, los obtenidos sobre la red $R_{h=0.25}$, pueden ser calculados ahora los momentos flectores en los puntos de la red con la fórmula:

$$m_i=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{0.25^2},\qquad \text{con } i=0,1,2,\ldots,16,$$

donde $y_{-1}$ e $y_{17}$ se pueden calcular mediante las fórmulas obtenidas en la tabla 2.2 y las análogas para los puntos ficticios a la derecha del intervalo.

| $x$ | discretos | | | continuos |
|---|---|---|---|---|
| | $h=1$ | $h=0.5$ | $h=0.25$ | |
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.25 | | | -0.0625 | -0.0674 |
| 0.50 | | -0.2500 | -0.2773 | -0.2865 |
| 0.75 | | | -0.6641 | -0.6768 |
| 1.00 | -1.0000 | -1.1875 | -1.2344 | -1.2500 |
| 1.25 | | | -1.9922 | -2.0101 |
| 1.50 | | -2.8750 | -2.9336 | -2.9531 |
| 1.75 | | | -4.0469 | -4.0674 |
| 2.00 | -5.0000 | -5.2500 | -5.3125 | -5.3333 |
| 2.25 | | | -6.7031 | -6.7241 |
| 2.50 | | -8.1250 | -8.1895 | -8.2109 |
| 2.75 | | | -9.7461 | -9.7684 |
| 3.00 | -11.0000 | -11.2812 | -11.3516 | -11.3750 |
| 3.25 | | | -12.9883 | -13.0132 |
| 3.50 | | -14.5625 | -14.6426 | -14.6693 |
| 3.75 | | | -16.3047 | -16.3335 |
| 4.00 | -17.5000 | -17.8750 | -17.9687 | -18.0000 |

Tabla 2.3: Resultados obtenidos, $By$, para distintos valores de $h$ y solución exacta.

Para completar el análisis de las funciones de deformación y esfuerzo sobre este conjunto de resultados correspondiente a la red $h = 0.25$, podemos obtener los giros de cada una de las secciones en los nodos de la red sin más que realizar las operaciones:

$$\theta_i = y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.5}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 16,$$

sin olvidar que hay que dividir los valores obtenidos por el factor $B$ si queremos disponer de estos giros en su verdadera escala.

Finalmente puede construirse en forma discreta, hasta donde es posible, la ley de cortantes

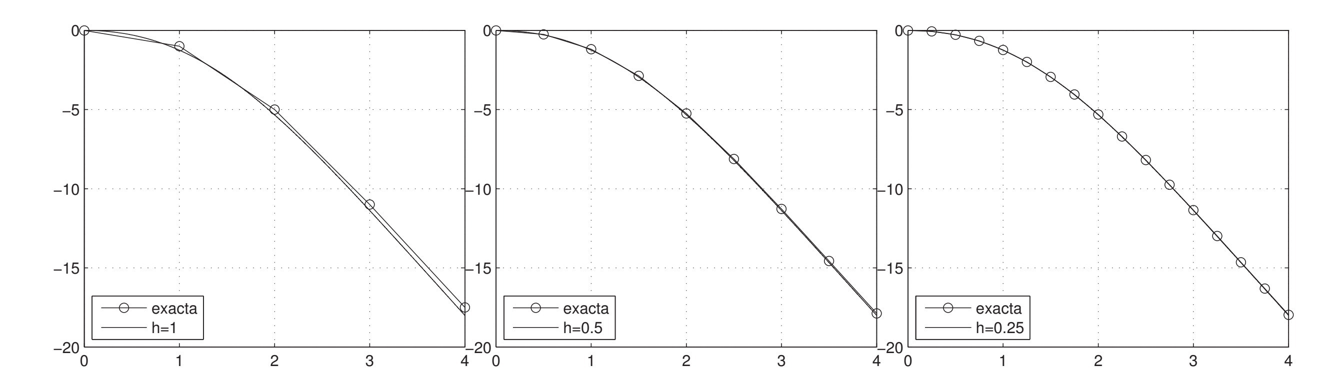



Figura 2.4: Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 1$, $h = 0.5$ y $h = 0.25$.

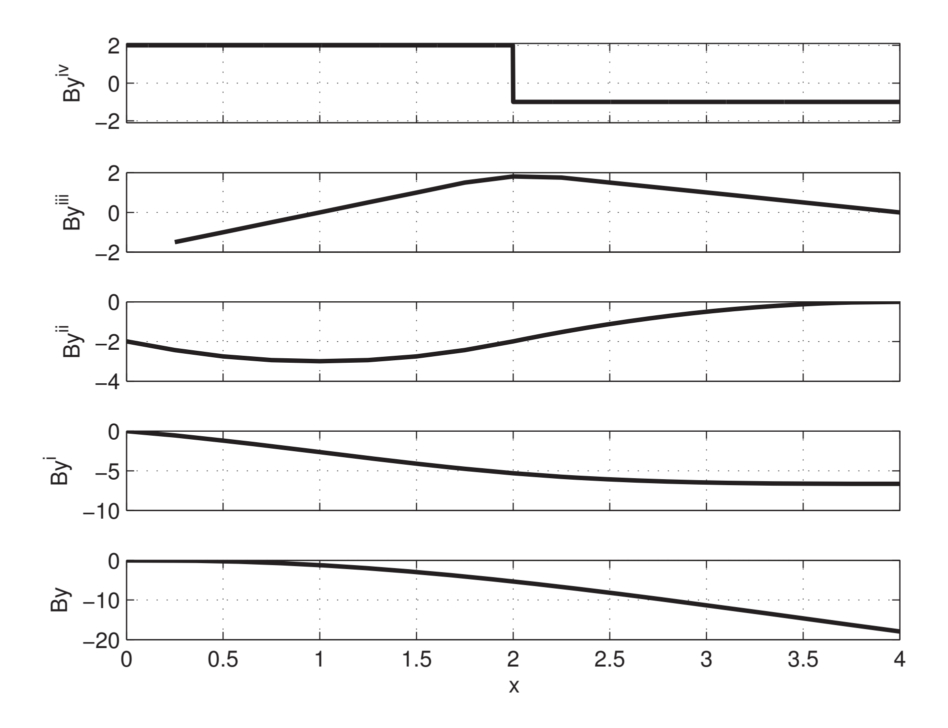



Figura 2.5: De arriba a abajo: ley de cargas $By^{iv}$, cortante $By'''$, flectores $By''$, giros $By'$ y flechas $By$.

a través de las fórmulas:

$$t_i = y_i''' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2 \cdot 0.25^3}, \qquad \text{con } i = 1, 2, \dots 16,$$

lo que nos proporciona directamente los esfuerzos de corte en cada uno de los nodos señalados. En el apartado § 3.5 completaremos estos cálculos de manera que incluyan estos esfuerzos sobre los vínculos.

La reconstrucción de las gráficas correspondientes a los valores discretos de flechas, giros, momentos y cortantes se muestran finalmente en la figura 2.5 bajo la correspondiente ley de cargas.

### 2.4.2. Ménsula empotrada en su extremo derecho

Consideramos una viga de 4 m en ménsula, perfectamente empotrada en su extremo derecho –figura 2.6(a)– cuya ley de cargas puede ser descrita en la forma:

$$w(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 < x < 2, \\ 2, & \text{si } 2 < x < 4. \end{cases}$$

Establecemos en primer lugar una red discreta de paso $h = 1$ m y enumeramos los nodos en la forma que se representa en la figura 2.6(b). El sistema que obtenemos será:

$$\begin{aligned} y_{-2} - 4y_{-1} + 6y_0 - 4y_1 + y_2 &= 0, \qquad \text{con } y_{-2} = 4y_0 - 4y_1 + y_2,\ y_{-1} = 2y_0 - y_1 \\ y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 &= 4, \qquad \text{con } y_{-1} = 2y_0 - y_1 \\ y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 &= 5, \qquad \text{con } y_4 = 0 \\ y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 &= 2, \qquad \text{con } y_4 = 0,\ y_5 = y_3 \end{aligned}$$

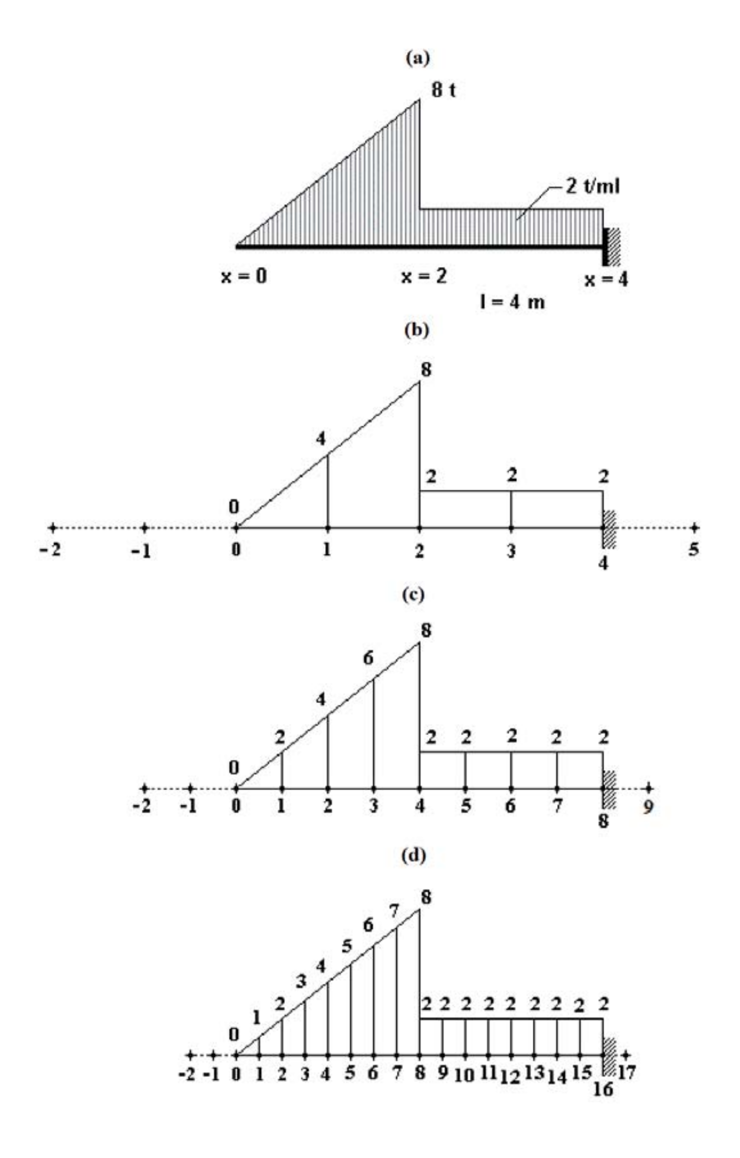



Figura 2.6

que matricialmente se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y cuya solución es

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95.0 \\ 66.0 \\ 37.0 \\ 12.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}.$$

| $x$ | discretos | | | continuos |
|---|---|---|---|---|
| | $h = 1$ | $h = 0.5$ | $h = 0.25$ | |
| 0.00 | 95.0000 | 98.0000 | 98.7031 | 98.9333 |
| 0.25 | | | 90.7500 | 90.9334 |
| 0.50 | | 82.3750 | 82.7969 | 82.9344 |
| 0.75 | | | 74.8477 | 74.9412 |
| 1.00 | 66.0000 | 66.7500 | 66.9141 | 66.9667 |
| 1.25 | | | 59.0195 | 59.0351 |
| 1.50 | | 51.2500 | 51.2031 | 51.1865 |
| 1.75 | | | 43.5234 | 43.4804 |
| 2.00 | 37.0000 | 36.2500 | 36.0625 | 36.0000 |
| 2.25 | | | 28.9297 | 28.8545 |
| 2.50 | | 22.5000 | 22.2539 | 22.1719 |
| 2.75 | | | 16.1719 | 16.0889 |
| 3.00 | 12.0000 | 11.0625 | 10.8281 | 10.7500 |
| 3.25 | | | 6.3750 | 6.3076 |
| 3.50 | | 3.1250 | 2.9727 | 2.9219 |
| 3.75 | | | 0.7891 | 0.7607 |
| 4.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Tabla 2.4: Resultados obtenidos, $By$, para distintos valores de $h$ y solución exacta.

Igual que en el ejemplo anterior, escribimos el sistema para un valor $h$ genérico de forma matricial:

$$\frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & & & & & & \\ -2 & 5 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x_0) \\ w(x_1) \\ w(x_2) \\ \vdots \\ w(x_i) \\ \vdots \\ w(x_{N-3}) \\ w(x_{N-2}) \\ w(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

y resolvemos para una retícula de paso $h = 0.5$ –figura 2.6(c)– y $h = 0.25$ –figura 2.6(d)–.

Los resultados –que deben dividirse por el factor $B$ para obtener los correspondientes descensos– para los distintos valores de $h$ pueden ser comparados entre si con los valores exactos obtenidos por métodos continuos en la tabla 2.4 y así mismo podemos comparar las gráficas obtenidas para las tres discretizaciones con los resultados exactos en la figura 2.7.

Eligiendo los resultados obtenidos para la proyección sobre la red $R_{h=0.25}$, podemos hallar los momentos flectores en los puntos de la red con los cálculos complementarios:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.25^2}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 16;$$

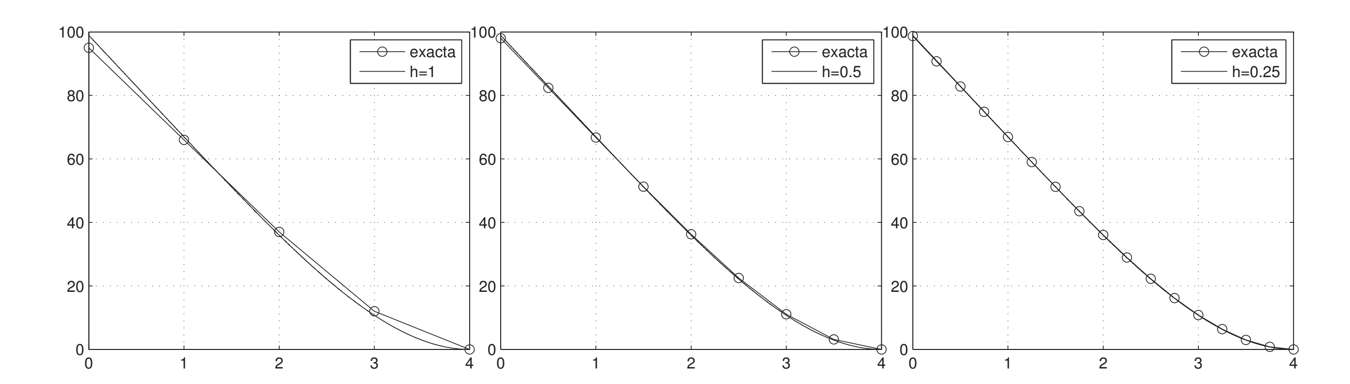



Figura 2.7: Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 1$, $h = 0.5$ y $h = 0.25$.

los giros de cada una de las secciones:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.5}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 16;$$

y las cortantes en cada uno de los nodos a través de las fórmulas:

$$y'''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2 \cdot 0.25^3}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 15.$$

La reconstrucción de las gráficas correspondientes a los valores discretos de flechas, giros, momentos y cortantes se muestran finalmente en la figura 2.8 bajo la correspondiente ley de cargas.

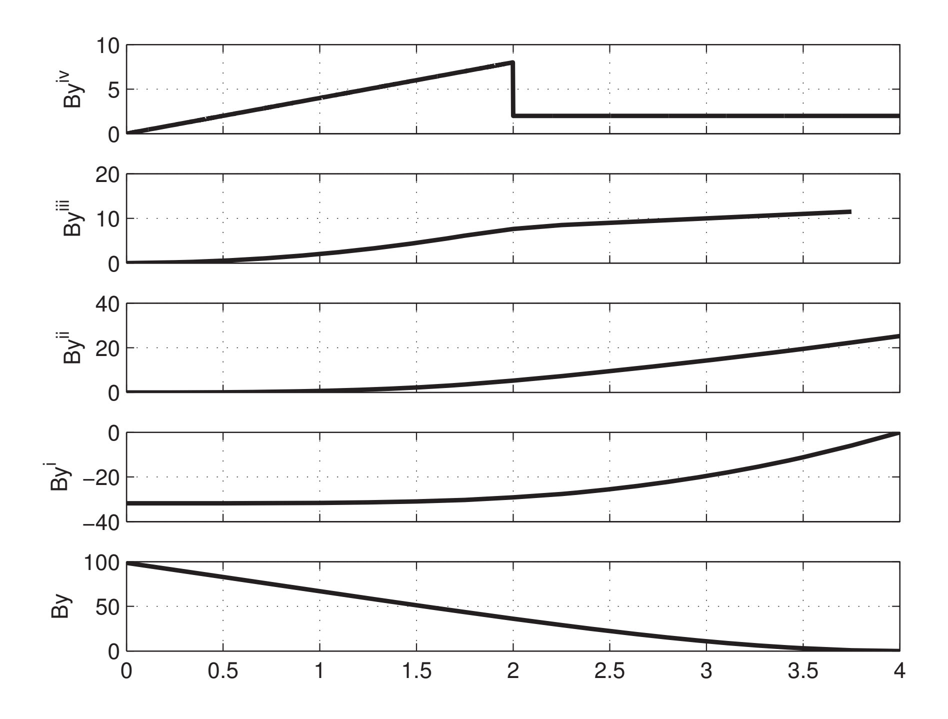



Figura 2.8: De arriba a abajo: ley de cargas $By^{iv}$, cortante $By'''$, flectores $By''$, giros $By'$ y flechas $By$.

## 2.4.3. Viga doblemente apoyada

Aquí consideraremos la viga de 6 m con dos apoyos rígidos en sus extremos (figura 2.9(a)) solicitada por una ley de cargas que puede venir representada por la función:

$$w(x) = \begin{cases} -x+4, & \text{si } 0 < x < 2, \\ 1, & \text{si } 2 < x < 4, \\ -x+7, & \text{si } 4 < x < 6. \end{cases}$$

Podemos iniciar nuestro proceso de aproximación estableciendo una red de paso $h = 1$ m.

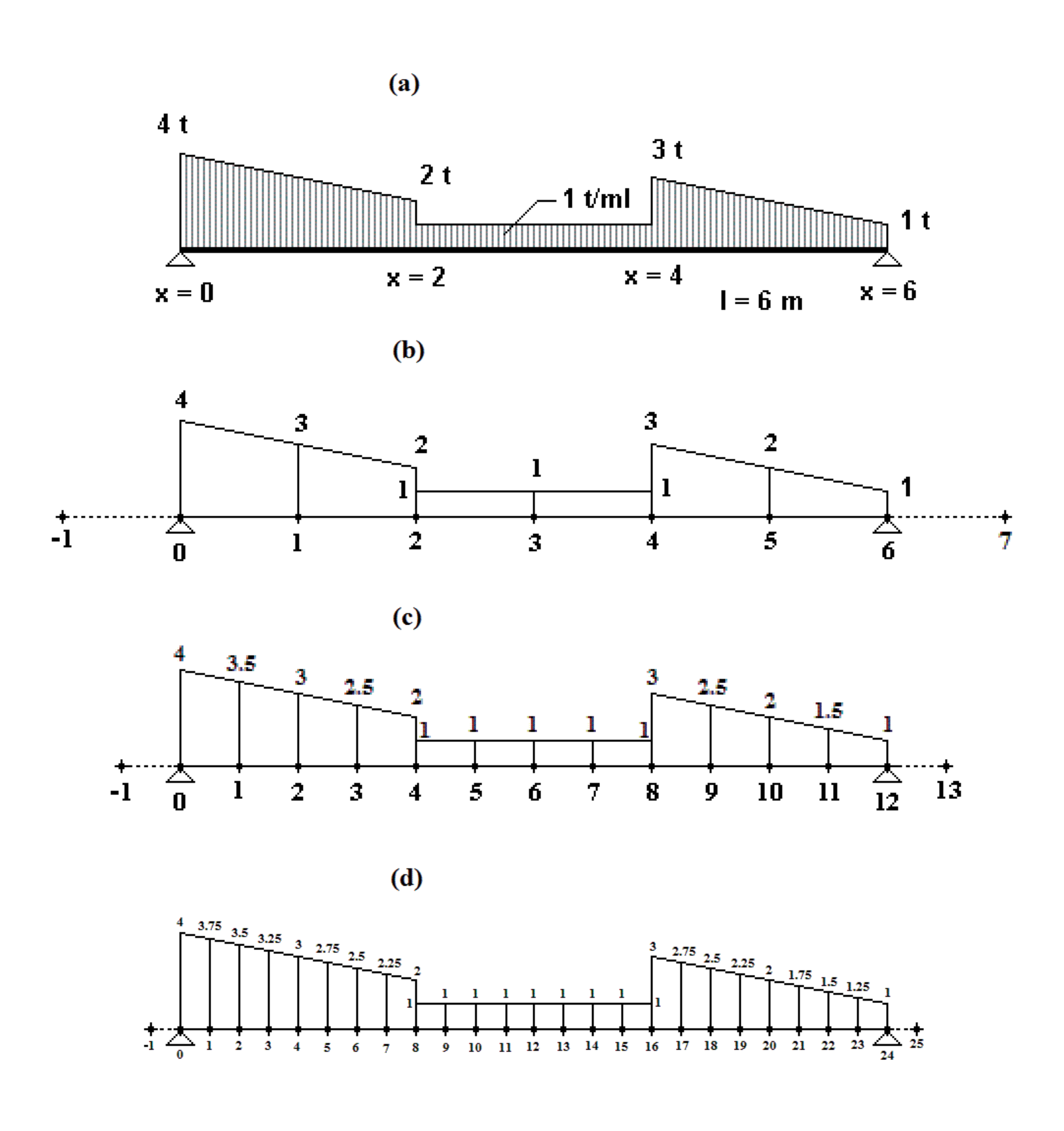



Figura 2.9

| $x$ | discretos | | | continuos |
|---|---|---|---|---|
| | $h=1$ | $h=0.5$ | $h=0.25$ | |
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.25 | | | 4.0677 | 4.0605 |
| 0.50 | | 8.0747 | 8.0354 | 8.0222 |
| 0.75 | | | 11.8179 | 11.7997 |
| 1.00 | 15.6667 | 15.4097 | 15.3435 | 15.3213 |
| 1.25 | | | 18.5534 | 18.5279 |
| 1.50 | | 21.4844 | 21.4004 | 21.3721 |
| 1.75 | | | 23.8479 | 23.8175 |
| 2.00 | 26.3333 | 25.9653 | 25.8694 | 25.8370 |
| 2.25 | | | 27.4468 | 27.4127 |
| 2.50 | | 28.6753 | 28.5681 | 28.5322 |
| 2.75 | | | 29.2253 | 29.1877 |
| 3.00 | 30.0000 | 29.5312 | 29.4141 | 29.3750 |
| 3.25 | | | 29.1341 | 29.0939 |
| 3.50 | | 28.5122 | 28.3889 | 28.3480 |
| 3.75 | | | 27.1860 | 27.1450 |
| 4.00 | 26.1667 | 25.6597 | 25.5369 | 25.4963 |
| 4.25 | | | 23.4568 | 23.4177 |
| 4.50 | | 21.0781 | 20.9688 | 20.9326 |
| 4.75 | | | 18.1067 | 18.0745 |
| 5.00 | 15.3333 | 14.9965 | 14.9143 | 14.8870 |
| 5.25 | | | 11.4438 | 11.4225 |
| 5.50 | | 7.8003 | 7.7556 | 7.7408 |
| 5.75 | | | 3.9167 | 3.9091 |
| 6.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Tabla 2.5: Resultados obtenidos, $By$, para distintos valores de $h$ y solución exacta.

Con la numeración de los nodos de la figura 2.9(b), obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcll} y_{-1}-4y_0+6y_1-4y_2+y_3 &=& 3, & \text{con } y_{-1}=-y_1,\ y_0=0 \\ y_0-4y_1+6y_2-4y_3+y_4 &=& 1.5, & \text{con } y_0=0 \\ y_1-4y_2+6y_3-4y_4+y_5 &=& 1, & \\ y_2-4y_3+6y_4-4y_5+y_6 &=& 2, & \text{con } y_6=0 \\ y_3-4y_4+6y_5-4y_6+y_7 &=& 2, & \text{con } y_6=0,\ y_7=-y_5 \end{array}$$

que matricialmente expresamos como:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

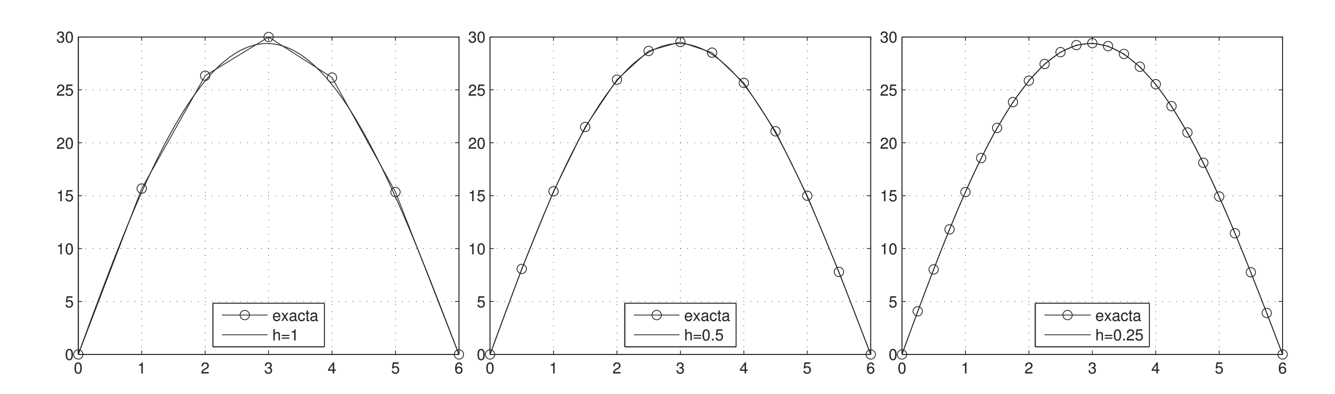



Figura 2.10: Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 1$, $h = 0.5$ y $h = 0.25$.

y cuya solución es

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 15.6666 \\ 26.3333 \\ 30.0000 \\ 26.1666 \\ 15.3333 \\ 0.0000 \end{pmatrix}.$$

En este caso, el sistema para un valor $h$ genérico viene dado, en forma matricial, por:

$$\frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ w(x_3) \\ \vdots \\ w(x_i) \\ \vdots \\ w(x_{N-3}) \\ w(x_{N-2}) \\ w(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Estableciendo ahora un paso de red $h = 0.5$ con la notación de la figura 2.9(c) y una red discreta de paso $h = 0.25$ con la representación de la figura 2.9(d), resolvemos nuevamente el sistema obtenido.

Los resultados para los distintos valores de $h$ pueden ser comparados entre si y con los valores exactos obtenidos por métodos continuos en la tabla 2.5. También podemos comparar las gráficas construidas con las poligonales para los tres valores del paso de red con los valores exactos en la figura 2.10.

Eligiendo los resultados obtenidos en la proyección sobre la red $R_{h=0.25}$, pueden ser calculados los momentos flectores en sus puntos a través de los cálculos complementarios:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.25^2}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 24,$$

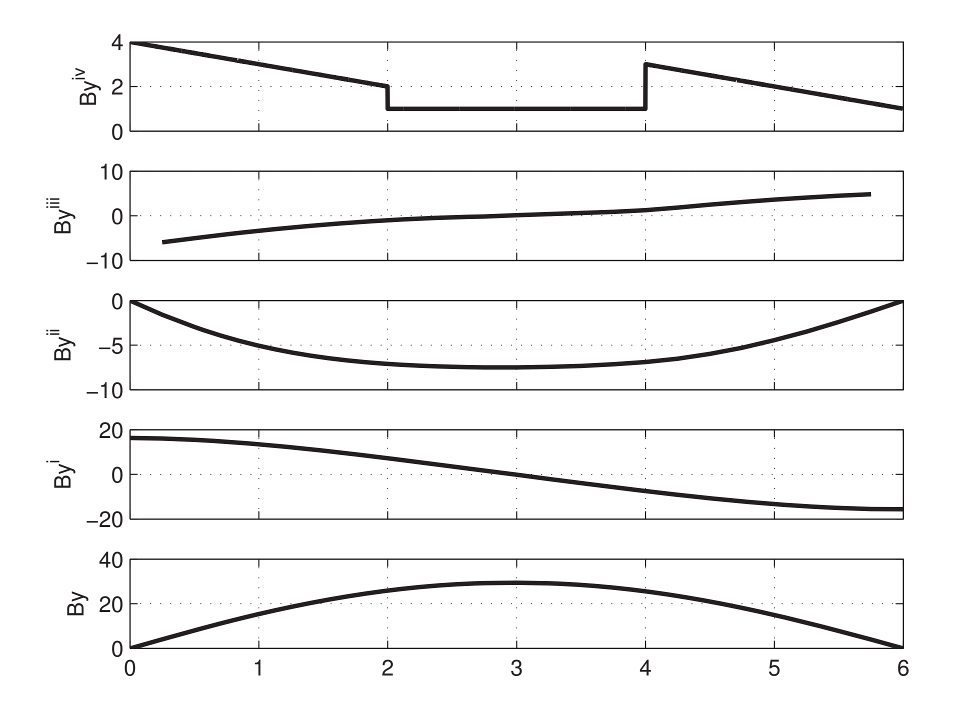



Figura 2.11: De arriba a abajo: ley de cargas $By^{iv}$, cortante $By'''$, flectores $By''$, giros $By'$ y flechas $By$.

y, análogamente, obtener los giros de cada una de las secciones con

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.5}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 24.$$

Para obtener los esfuerzos cortantes en esta viga, habrá que aplicar las fórmulas de aproximación:

$$y_i''' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2 \cdot 0.25^3}, \qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots, 23.$$

Estos resultados junto a los momentos, giros de las secciones y flechas para la aproximación $h = 0.25$ pueden verse sobre las gráficas de las figura 2.11 bajo la ley de cargas que solicita la pieza.

## 2.4.4. Viga empotrada-apoyada

Se considera aquí la viga empotrada-apoyada de 5 m representada en la figura 2.12(a) y sometida a cargas triangulares definidas por la función continua:

$$w(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{si } 0 < x < 2, \\ x - 2, & \text{si } 2 < x < 5. \end{cases}$$

Estableciendo en primer lugar la red de paso $h = 1$ m con la notación de la figura 2.12(b),

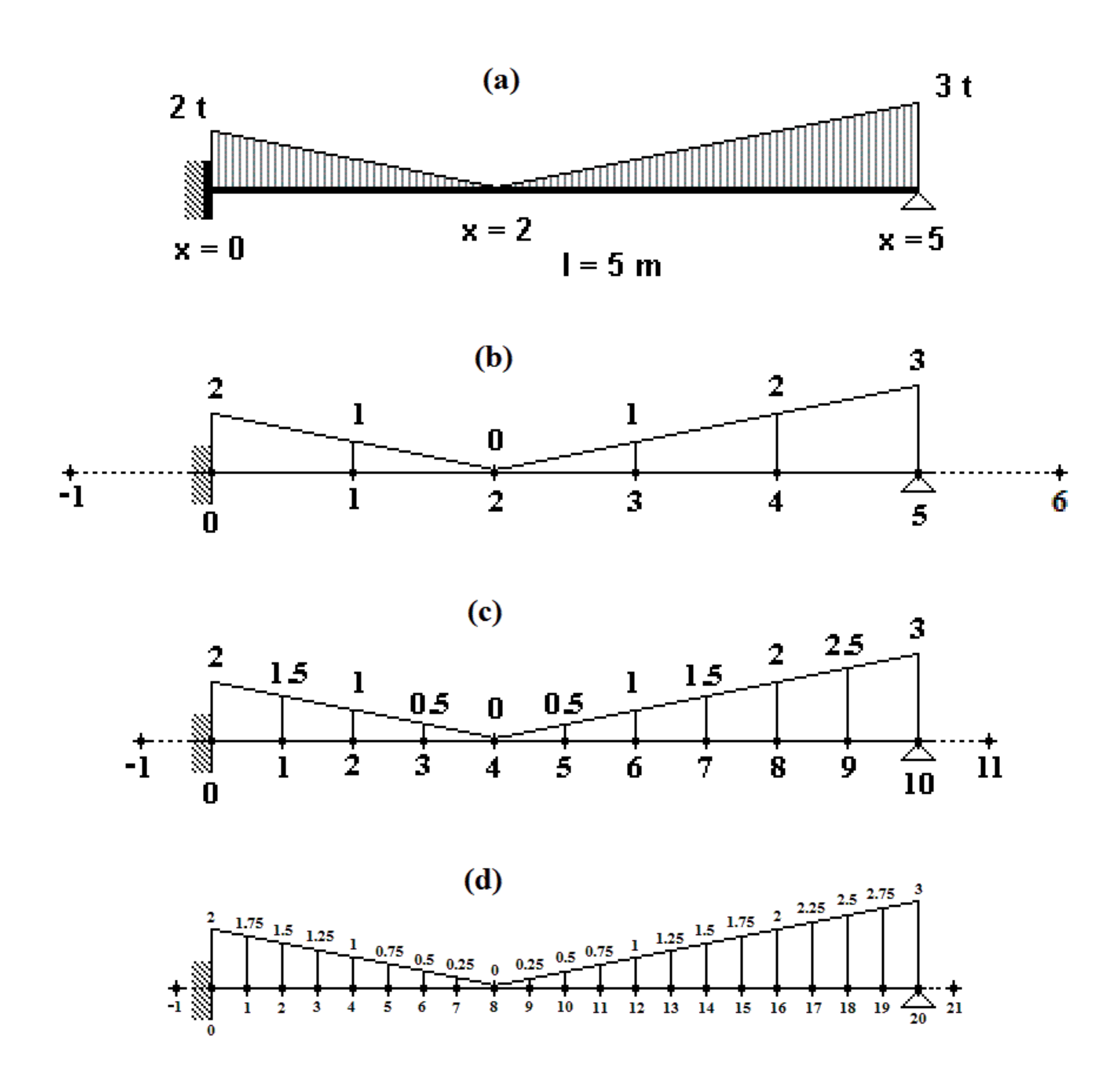



Figura 2.12

obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 &= 1, &\quad& \text{con } y_{-1} = y_1,\ y_0 = 0 \\
y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 &= 0, && \text{con } y_0 = 0 \\
y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 &= 1, && \text{con } y_5 = 0 \\
y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 &= 2, && \text{con } y_5 = 0,\ y_6 = -y_4
\end{aligned}
$$

que matricialmente se puede expresar de la siguiente manera:

$$
\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

| $x$ | discretos | | | continuos |
|---|---|---|---|---|
| | $h=1$ | $h=0.5$ | $h=0.25$ | |
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.25 | | | 0.0919 | 0.0848 |
| 0.50 | | 0.3556 | 0.3212 | 0.3092 |
| 0.75 | | | 0.6482 | 0.6334 |
| 1.00 | 1.2353 | 1.0858 | 1.0395 | 1.0232 |
| 1.25 | | | 1.4660 | 1.4494 |
| 1.50 | | 1.9475 | 1.9029 | 1.8868 |
| 1.75 | | | 2.3282 | 2.3130 |
| 2.00 | 2.8471 | 2.7603 | 2.7219 | 2.7076 |
| 2.25 | | | 3.0649 | 3.0512 |
| 2.50 | | 3.3748 | 3.3382 | 3.3247 |
| 2.75 | | | 3.5237 | 3.5104 |
| 3.00 | 3.7412 | 3.6418 | 3.6053 | 3.5921 |
| 3.25 | | | 3.5697 | 3.5567 |
| 3.50 | | 3.4433 | 3.4078 | 3.3952 |
| 3.75 | | | 3.1151 | 3.1031 |
| 4.00 | 2.8235 | 2.7239 | 2.6930 | 2.6821 |
| 4.25 | | | 2.1498 | 2.1406 |
| 4.50 | | 1.5217 | 1.5017 | 1.4948 |
| 4.75 | | | 0.7736 | 0.7697 |
| 5.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Tabla 2.6: Resultados obtenidos, $By$, para distintos valores de $h$ y solución exacta.

y cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 1.2353 \\ 2.8471 \\ 3.7412 \\ 2.8235 \\ 0.0000 \end{pmatrix}.$$

El sistema escrito de forma matricial para un paso genérico $h$ queda:

$$\frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ w(x_3) \\ \vdots \\ w(x_i) \\ \vdots \\ w(x_{N-3}) \\ w(x_{N-2}) \\ w(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

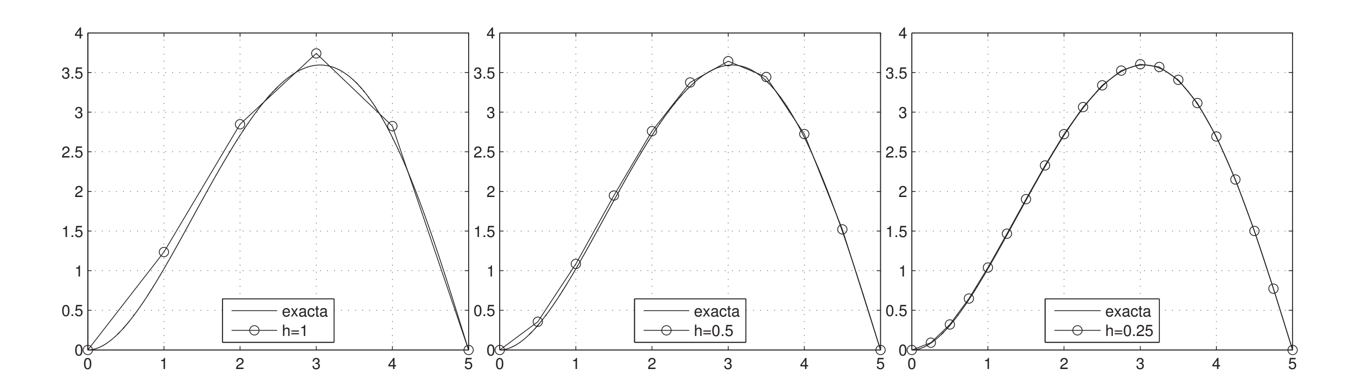



Figura 2.13: Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 1$, $h = 0.5$ y $h = 0.25$.

Así, resolvemos para una red de paso $h = 0.5$ m, con la notación de la figura 2.12(c) y para una red de paso $h = 0.25$ m con la numeración de nodos de la figura 2.12(d).

Los resultados para los distintos valores de $h$ pueden ser comparados entre si y con los valores exactos obtenidos por otros métodos en la tabla 2.6. Pueden visualizarse estas comparaciones con las gráficas de las poligonales asociadas a estos tres conjuntos de soluciones en la figura 2.13.

Eligiendo los resultados obtenidos para la proyección sobre la red $h = 0.25$, pueden ser

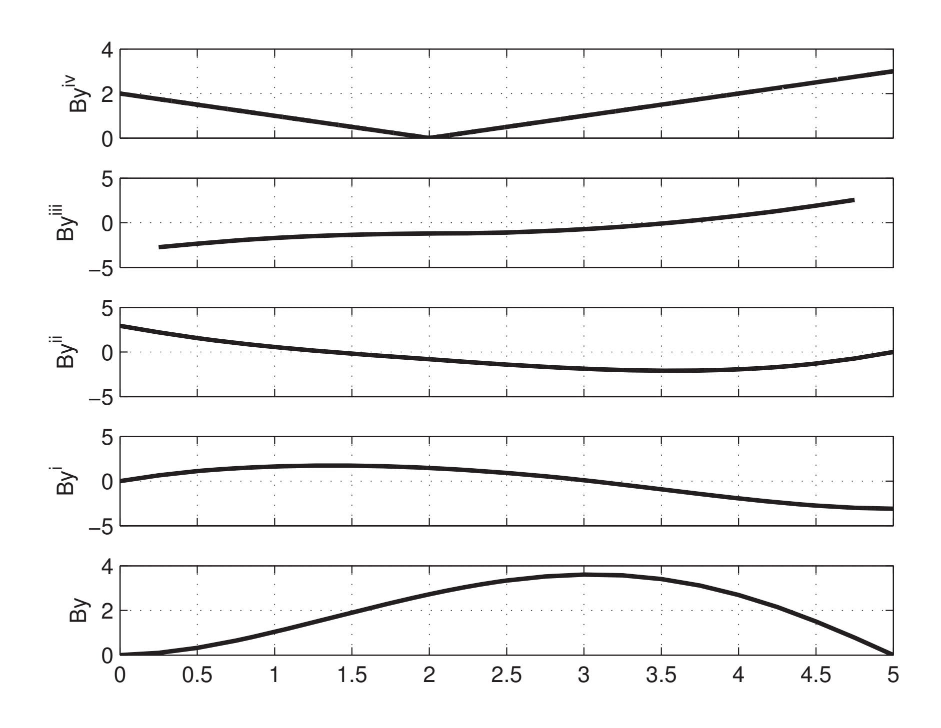



Figura 2.14: De arriba a abajo: ley de cargas $By^{iv}$, cortante $By'''$, flectores $By''$, giros $By'$ y flechas $By$.

calculados los momentos flectores con los cálculos complementarios:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.25^2}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots 20.$$

Para obtener los giros de las secciones se aplicarán las fórmulas:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.5}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 20.$$

Finalmente para obtener los esfuerzos de corte aplicaremos:

$$y'''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2 \cdot 0.25^3}, \qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots, 19.$$

La ley de cargas, los esfuerzos de corte, los momentos, los giros de las secciones y las flechas halladas para la aproximación $h = 0.25$ se representan gráficamente en la figura 2.14.

## 2.4.5. Viga apoyada-empotrada

Viga de 6 m apoyada-empotrada sometida a una ley de carga triangular como se muestra en la figura 2.15(a) que puede venir descrita analíticamente por la función:

$$w(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 3, \\ -x + 6, & \text{si } 3 < x < 6. \end{cases}$$

Estableciendo como retícula de paso $h = 1$ representada en la figura 2.15(b), se puede obtener el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcll}
y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 & = & 1, & \text{con } y_{-1} = -y_1,\ y_0 = 0 \\
y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 & = & 2, & \text{con } y_0 = 0 \\
y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 & = & 3, & \\
y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 & = & 2, & \text{con } y_6 = 0 \\
y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 & = & 1, & \text{con } y_6 = 0,\ y_7 = y_5
\end{array}$$

que matricialmente podemos expresar como:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 8.9795 \\ 14.8767 \\ 15.6096 \\ 11.0959 \\ 4.2534 \\ 0.0000 \end{pmatrix}.$$

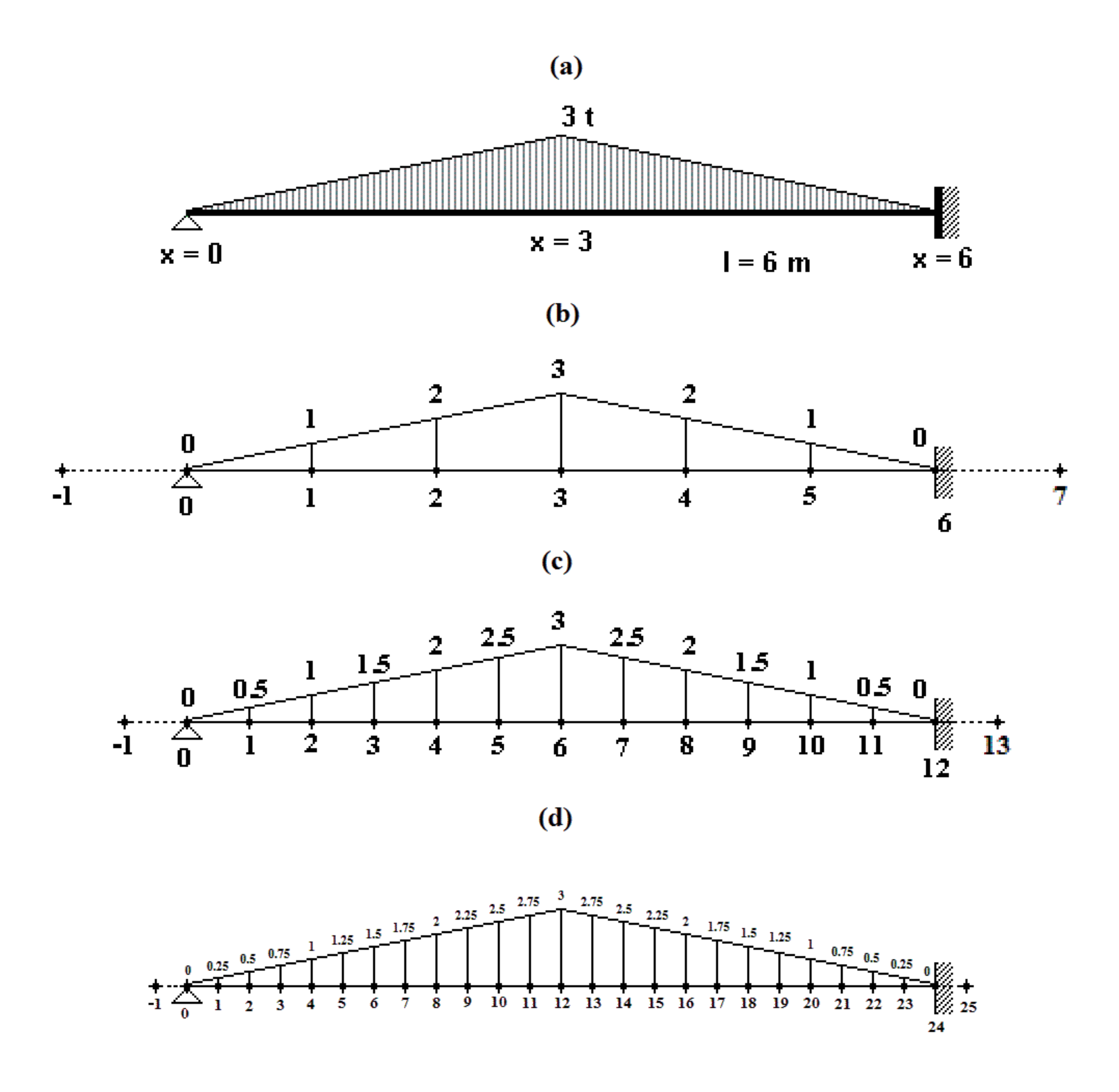



Figura 2.15

Si escribimos el sistema de forma matricial para una retícula de paso $h$:

$$\frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ w(x_3) \\ \vdots \\ w(x_i) \\ \vdots \\ w(x_{N-3}) \\ w(x_{N-2}) \\ w(x_{N-1}) \end{pmatrix},$$

| $x$ | discretos | | | continuos |
|---|---|---|---|---|
| | $h = 1$ | $h = 0.5$ | $h = 0.25$ | |
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.25 | | | 2.1178 | 2.1013 |
| 0.50 | | 4.2862 | 4.1873 | 4.1546 |
| 0.75 | | | 6.1611 | 6.1126 |
| 1.00 | 8.9795 | 8.1861 | 7.9938 | 7.9302 |
| 1.25 | | | 9.6429 | 9.5652 |
| 1.50 | | 11.3445 | 11.0700 | 10.9793 |
| 1.75 | | | 12.2413 | 12.1390 |
| 2.00 | 14.8767 | 13.4689 | 13.1289 | 13.0167 |
| 2.25 | | | 13.7120 | 13.5916 |
| 2.50 | | 14.3603 | 13.9773 | 13.8509 |
| 2.75 | | | 13.9204 | 13.7904 |
| 3.00 | 15.6096 | 13.9450 | 13.5468 | 13.4156 |
| 3.25 | | | 12.8725 | 12.7430 |
| 3.50 | | 12.3053 | 11.9254 | 11.8001 |
| 3.75 | | | 10.7441 | 10.6253 |
| 4.00 | 11.0959 | 9.7111 | 9.3770 | 9.2667 |
| 4.25 | | | 7.8811 | 7.7811 |
| 4.50 | | 6.5886 | 6.3214 | 6.2332 |
| 4.75 | | | 4.7698 | 4.6946 |
| 5.00 | 4.2534 | 3.4889 | 3.3038 | 3.2427 |
| 5.25 | | | 2.0061 | 1.9597 |
| 5.50 | | 1.0569 | 0.9629 | 0.9319 |
| 5.75 | | | 0.2638 | 0.2483 |
| 6.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Tabla 2.7: Resultados obtenidos, $By$, para distintos valores de $h$ y solución exacta.

que podemos utilizar para resolver con una retícula de paso $h = 0.5$ (figura 2.15(c)) así como para una red de paso $h = 0.25$ con los nodos numerados como en la figura 2.15(d).

Las gráficas asociadas al conjunto de valores hallados para cada paso de red pueden ser comparadas entre sí y con los valores exactos en la figura 2.16. Los resultados para los distintos valores de $h$ pueden compararse en la tabla 2.7.

Eligiendo los resultados obtenidos para la proyección sobre la red $R_{h=0.25}$, pueden calcularse los momentos flectores con las fórmulas:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.25^2}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 24.$$

Se completan las funciones de deformación y esfuerzo obteniendo los giros de las secciones con auxilio de las fórmulas:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.5}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 24,$$

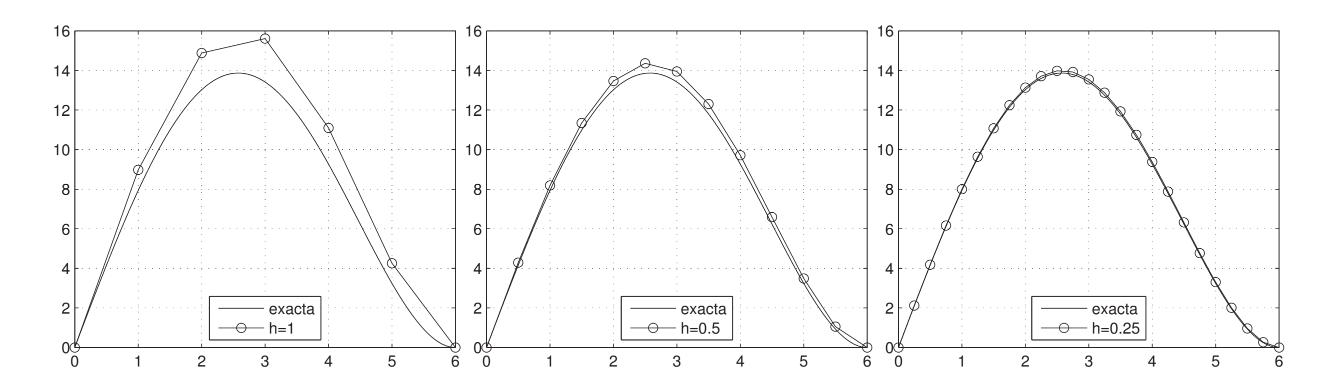



Figura 2.16: Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 1$, $h = 0.5$ y $h = 0.25$.

y finalmente, para obtener los esfuerzos de corte aplicaremos:

$$y_i''' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2 \cdot 0.25^3}, \qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots, 23.$$

La ley de cargas, los esfuerzos de corte, los momentos, los giros de las secciones y las flechas halladas para la aproximación $h = 0.25$ pueden verse representadas por las gráficas de la figura 2.17. Los descensos y giros deben ser divididos por el coeficiente $B$.

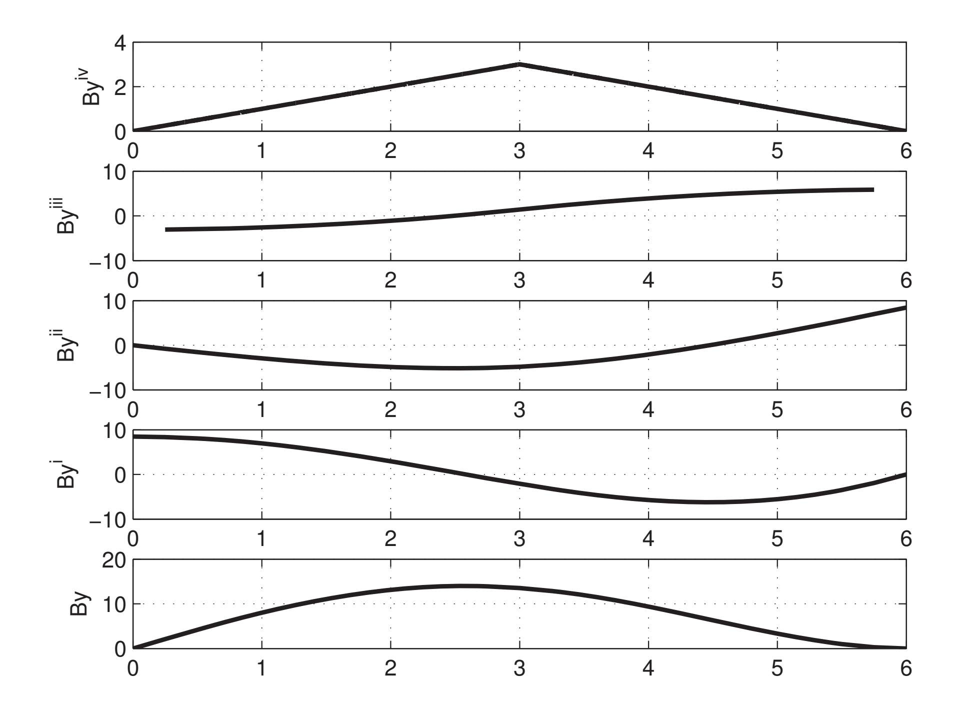



Figura 2.17: De arriba a abajo: ley de cargas $By^{iv}$, cortante $By'''$, flectores $By''$, giros $By'$ y flechas $By$.

## 2.4.6. Viga doblemente empotrada

Viga de 8 m doblemente empotrada sometida a una ley de cargas, simétrica respecto al eje vertical que pasa por su punto medio, de envolvente parabólica definida por la función $w(x) = -x^2 + 8x$ (figura 2.18(a)).

Podemos establecer una red de paso $h = 1$ m. Las condiciones de simetría nos permiten numerar los nodos como en la figura 2.18(b) y reducir el sistema de ecuaciones a la mitad.

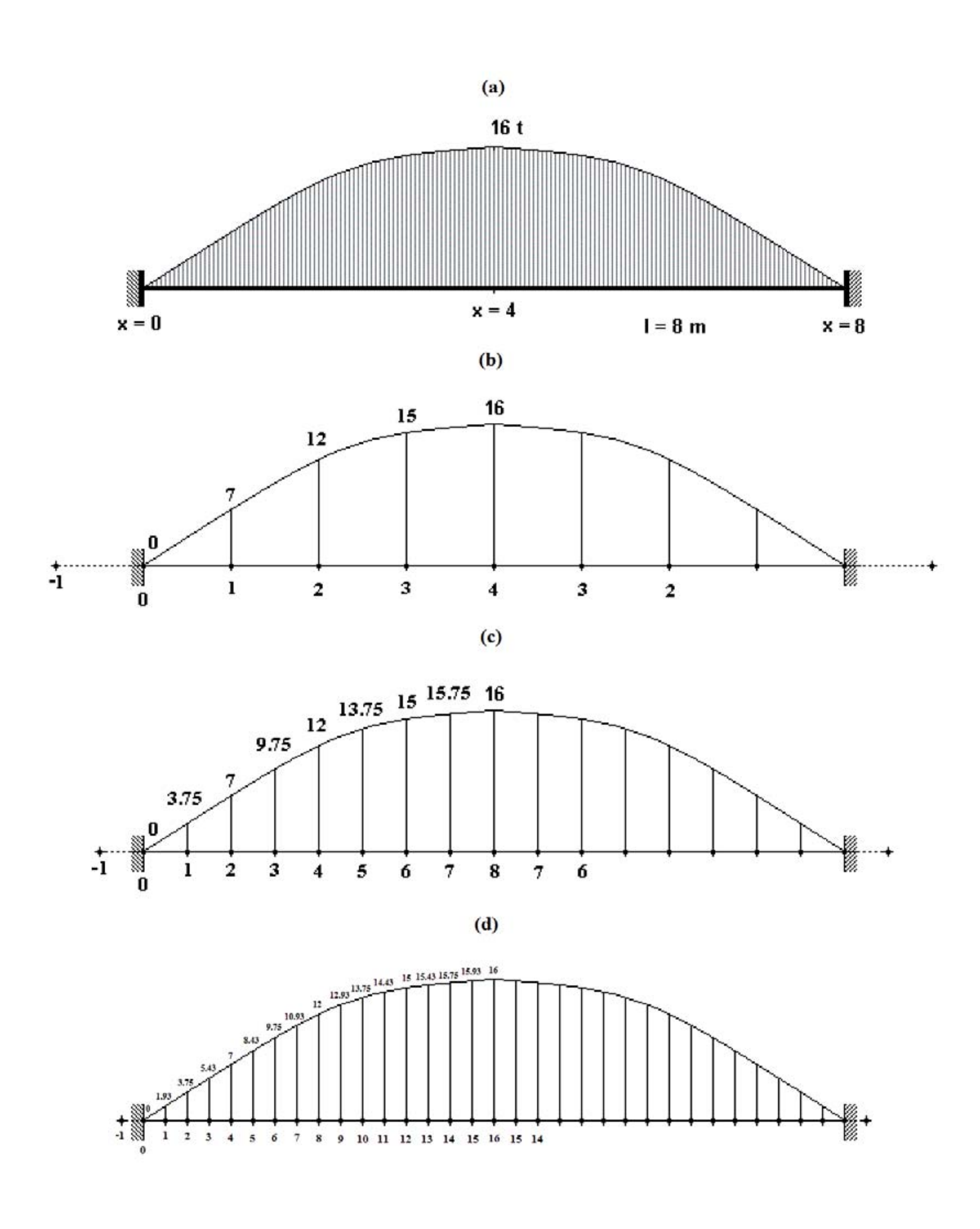



Figura 2.18

| $x$ | discretos | | | continuos |
|---|---|---|---|---|
| | $h=1$ | $h=0.5$ | $h=0.25$ | |
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.25 | | | 2.1333 | 2.0223 |
| 0.50 | | 8.5332 | 7.8673 | 7.6465 |
| 0.75 | | | 16.5435 | 16.2153 |
| 1.00 | 34.1250 | 28.8203 | 27.5181 | 27.0861 |
| 1.25 | | | 40.1685 | 39.6373 |
| 1.50 | | 55.7832 | 53.8995 | 53.2746 |
| 1.75 | | | 68.1490 | 67.4366 |
| 2.00 | 94.5000 | 84.7813 | 82.3926 | 81.6000 |
| 2.25 | | | 96.1490 | 95.2839 |
| 2.50 | | 111.7832 | 108.9835 | 108.0545 |
| 2.75 | | | 120.5122 | 119.5281 |
| 3.00 | 146.1250 | 133.5078 | 130.4048 | 129.3750 |
| 3.25 | | | 138.3872 | 137.3216 |
| 3.50 | | 147.5332 | 144.2443 | 143.1527 |
| 3.75 | | | 147.8208 | 146.7137 |
| 4.00 | 166.0000 | 152.3750 | 149.0234 | 147.9111 |

Tabla 2.8: Resultados obtenidos, $By$, para distintos valores de $h$ y solución exacta.

Se puede escribir el sistema:

$$\begin{array}{rcll} y_{-1}-4y_0+6y_1-4y_2+y_3 &=& 7, & \text{con } y_{-1}=y_1,\ y_0=0 \\ y_0-4y_1+6y_2-4y_3+y_4 &=& 12, & \text{con } y_0=0 \\ y_1-4y_2+6y_3-4y_4+y_3 &=& 15, & \\ y_2-4y_3+6y_4-4y_3+y_2 &=& 16, & \end{array}$$

que matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

y cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 34.1250 \\ 94.5000 \\ 146.1250 \\ 166.0000 \end{pmatrix}.$$

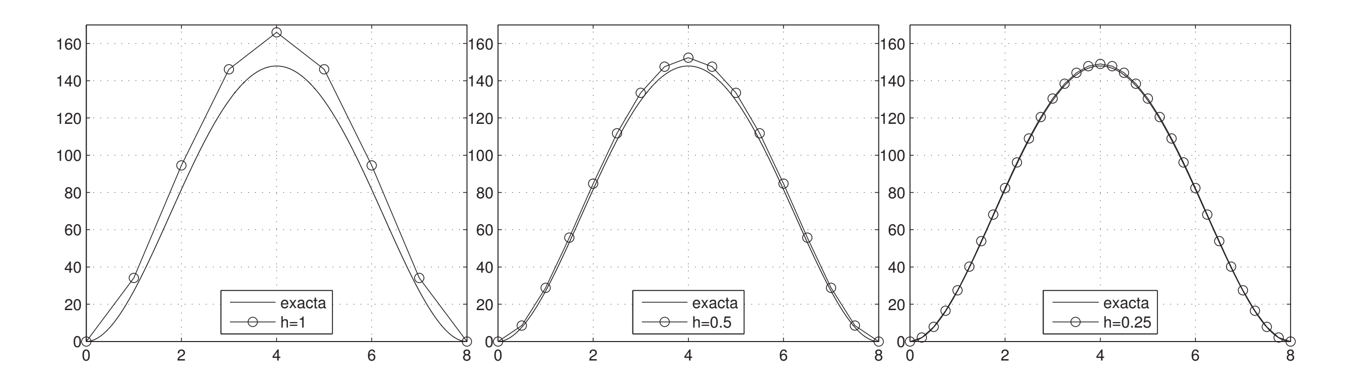



Figura 2.19: Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 1$, $h = 0.5$ y $h = 0.25$.

Para un valor de $h$ genérico, el sistema se puede escribir como:

$$\frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 7 & -4 \\ & & & & & & 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ y_i \\ \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ w(x_3) \\ \\ w(x_i) \\ \\ w(x_{N-3}) \\ w(x_{N-2}) \\ w(x_{N-1}) \end{pmatrix},$$

donde en este caso, $N = \frac{1}{2}\frac{8}{h}$.

Utilizando esta última expresión dada en forma genérica, resolvemos para la configuración de la figura 2.18(c), habiendo tenido en cuenta una vez más las condiciones de simetría y para una red de paso $h = 0.5$. Asimismo, resolvemos también para la configuración de la figura 2.18(d), esta vez para una red de paso $h = 0.25$.

Los resultados para los distintos valores de $h$ pueden ser comparados entre si y con los valores exactos en la tabla 2.8 y pueden también visualizarse las aproximaciones obtenidas en las tres redes sobre la gráfica de la figura 2.19 (donde además se ha dibujado la solución aproximada sobre todo el intervalo aprovechado la simetría que presenta la solución).

Eligiendo los resultados obtenidos para la proyección sobre la red $R_{h=0.25}$, pueden ser calculados ahora los momentos flectores en sus puntos a través de los cálculos complementarios:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.25^2}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 16,$$

donde debe entenderse que $y_{17} = y_{15}$.

Podemos completar las funciones de deformación y esfuerzo obteniendo ahora los giros de las secciones con:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.5}, \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \ldots, 16,$$

nuevamente con $y_{17} = y_{15}$, y para obtener, finalmente, los esfuerzos de corte aplicaremos:

$$y_i''' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2 \cdot 0.25^3}, i = 1, 2, \ldots, 16,$$

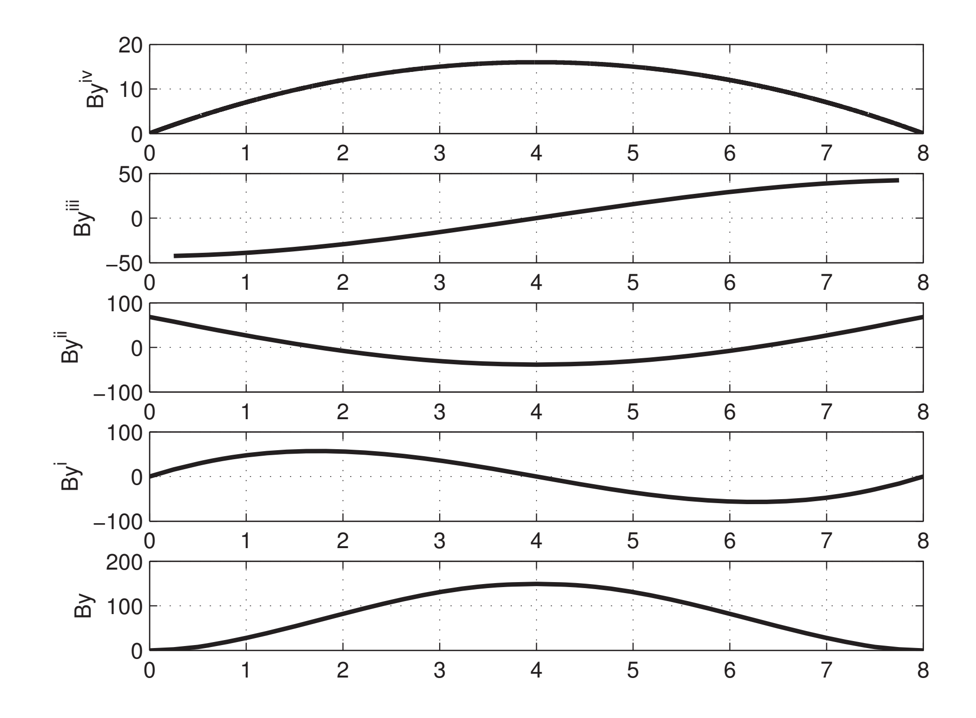



Figura 2.20: De arriba a abajo: ley de cargas $By^{iv}$, cortante $By'''$, flectores $By''$, giros $By'$ y flechas $By$.

donde ahora $y_{17} = y_{15}$ y $y_{18} = y_{14}$.

La ley de cargas, los esfuerzos de corte, los momentos, los giros de las secciones y las flechas halladas sobre la mitad izquierda de la viga para la aproximación $h = 0.25$ pueden verse sobre las gráficas de las figura 2.20. Para poder completar las gráficas en todo el intervalo se ha tenido en cuenta que las derivadas de orden par son funciones pares con respecto el eje vertical de simetría y las impares son funciones impares.

## 2.5. Los métodos de dos etapas en ausencia de cargas y momentos aislados. Ejemplos

Como alternativa a los problemas resueltos anteriormente y como introducción a los métodos que utilizaremos sistemáticamente en el § 3 podemos plantear ahora la integración de la ecuación de cuarto orden (2.2) en dos etapas, cada una de las cuales aborda una ecuación de segundo orden. En la primera etapa se obtendrían los momentos flectores:

$$m''(x) = w(x),$$

en tanto en la segunda obtendríamos las flechas que satisfacen la ecuación:

$$By''(x) = m(x).$$

La integración aproximada de ambas ecuaciones simplifica en cierta medida el algoritmo aunque multiplica, en general, el número de ecuaciones ya que ambas etapas conducirán generalmente a un solo sistema de ecuaciones, es decir: los momentos sobre los nodos quedarán

| tipo de viga | extremo izquierdo | | extremo derecho | |
|---|---|---|---|---|
| ménsula empotrada en su extremo izquierdo | $y(0)=0$ | $y'(0)=0$ | $m(l)=0$ | $m'(l)=0$ |
| ménsula empotrada en su extremo derecho | $m(0)=0$ | $m'(0)=0$ | $y(l)=0$ | $y'(l)=0$ |
| viga doblemente apoyada | $y(0)=0$ | $m(0)=0$ | $y(l)=0$ | $m(l)=0$ |
| viga empotrada-apoyada | $y(0)=0$ | $y'(0)=0$ | $y(l)=0$ | $m(l)=0$ |
| viga apoyada-empotrada | $y(0)=0$ | $m(0)=0$ | $y(l)=0$ | $y'(l)=0$ |
| viga doblemente empotrada | $y(0)=0$ | $y'(0)=0$ | $y(l)=0$ | $y'(l)=0$ |

Tabla 2.9: Leyes de cargas segmentariamente continuas sin acciones aisladas en los extremos.

normalmente ligados a los valores de las flechas. Los dos sistemas de ecuaciones algebraicas podrán ser resolubles sucesivamente, en dos etapas reales, solamente en el caso de ménsulas o vigas doblemente apoyadas (casos isostáticos), en tanto que ambos deberán ser resueltos simultáneamente en el resto (casos hiperestáticos).

Las condiciones de extremo en el caso en que las leyes de cargas no incluyan cargas concentradas ni momentos aislados deben ser reinterpretadas en términos de momentos y de flechas lo que reduce los puntos ficticios al primer nivel, es decir: a los puntos a distancia $h$ del extremo. Estas condiciones vendrán ahora dadas en términos de las funciones (flechas y/o momentos) o de sus derivadas primeras según la tabla alternativa 2.9.

Las condiciones de extremo tipo deben ser asimismo replanteadas a la hora de asignar valores a los puntos "ficticios". Tomando el extremo izquierdo $x_0$ y el nodo interior $x_1$ como referencia, se muestran en la tabla 2.10 las condiciones de extremo y los valores que se deben asignar con este procedimiento al punto ficticio $x_{-1}$ según las condiciones del vínculo extremo respecto al valor del punto interior próximo al punto frontera $x_0$. Estas condiciones se completan en la tabla con $y_0 = 0$, descenso nulo en apoyos rígidos y empotramientos perfectos y $m_0 = 0$ en apoyos. Estos resultados son válidos en el extremo derecho sin más que cambiar la notación de los subíndices.

Para ilustrar el método en "dos etapas" se retoman tres de los ejercicios anteriores sobre una red de paso $h = 0.25$ m y se obtienen directamente los momentos flectores y las flechas

| vínculos | condiciones de extremo | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1ª etapa | | 2ª etapa | |
| empotramiento perfecto | | | $y_0 = 0$<br>$\dfrac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0$ | $y_0 = 0$<br>$y_{-1} = y_1$ |
| apoyo rígido | | $m_0 = 0$ | | $y_0 = 0$ |
| extremo libre | $m_0 = 0$<br>$\dfrac{m_1 - m_{-1}}{2h} = 0$ | $m_0 = 0$<br>$m_{-1} = m_1$ | | |

Tabla 2.10: Solicitaciones segmentariamente continuas sin acciones aisladas en los extremos.

de cada pieza.

### 2.5.1. Ménsula empotrada en su extremo derecho

Corresponde al ejemplo descrito en § 2.4.2; se trata de la viga de 4 m en libre-empotrada cuya ley de cargas venía definida por la función:

$$w(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 < x < 2, \\ 2, & \text{si } 2 < x < 4, \end{cases}$$

según la figura 2.6(a).

Sobre el nuevo esquema de la figura 2.21 que incluye un solo punto exterior a cada uno de los lados del intervalo que determina la longitud de la pieza, plantearemos el sistema de

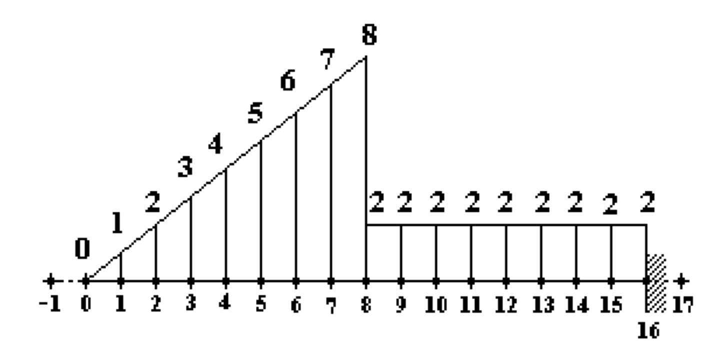



Figura 2.21

ecuaciones:

| 1ª etapa | 2ª etapa |
|---|---|
| $\frac{1}{0.25^2}(m_1 - 2m_0 + m_{-1}) = 0,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) = m_1,$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_2 - 2m_1 + m_0) = 1,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_3 - 2y_2 + y_1) = m_2,$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_3 - 2m_2 + m_1) = 2,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_4 - 2y_3 + y_2) = m_3,$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_4 - 2m_3 + m_2) = 3,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_5 - 2y_4 + y_3) = m_4,$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_5 - 2m_4 + m_3) = 4,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_6 - 2y_5 + y_4) = m_5,$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_6 - 2m_5 + m_4) = 5,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_7 - 2y_6 + y_5) = m_6,$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_7 - 2m_6 + m_5) = 6,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_8 - 2y_7 + y_6) = m_7,$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_8 - 2m_7 + m_6) = 7,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_9 - 2y_8 + y_7) = m_8,$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_9 - 2m_8 + m_7) = 5,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_{10} - 2y_9 + y_8) = m_9,$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_{10} - 2m_9 + m_8) = 2,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_{11} - 2y_{10} + y_9) = m_{10},$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_{11} - 2m_{10} + m_9) = 2,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_{12} - 2y_{11} + y_{10}) = m_{11},$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_{12} - 2m_{11} + m_{10}) = 2,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_{13} - 2y_{12} + y_{11}) = m_{12},$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_{13} - 2m_{12} + m_{11}) = 2,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_{14} - 2y_{13} + y_{12}) = m_{13},$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_{14} - 2m_{13} + m_{12}) = 2,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_{15} - 2y_{14} + y_{13}) = m_{14},$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_{15} - 2m_{14} + m_{13}) = 2,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_{16} - 2y_{15} + y_{14}) = m_{15},$ |
| $\frac{1}{0.25^2}(m_{16} - 2m_{15} + m_{14}) = 2,$ | $\frac{1}{0.25^2}(y_{17} - 2y_{16} + y_{15}) = m_{16},$ |
| con las condiciones: | con las condiciones: |
| $m_0 = 0,$ | $y_{16} = 0,$ |
| $m_{-1} = m_1,$ | $y_{17} = y_{15}.$ |

Este sistema contiene dos subsistemas de Cramer, es decir: resoluble en dos etapas sucesivamente, en la primera de las cuales podemos hallar los momentos y posteriormente un segundo sistema dependiente de los valores hallados en el primero.

Las soluciones de momentos y flechas del sistema completo son:

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ m_{15} \\ m_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0625 \\ 0.2500 \\ 0.6250 \\ 1.2500 \\ 2.1875 \\ 3.5000 \\ 5.2500 \\ 7.3125 \\ 9.5000 \\ 11.8125 \\ 14.2500 \\ 16.8125 \\ 19.5000 \\ 22.3125 \\ 25.2500 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98.7031 \\ 90.7500 \\ 82.7969 \\ 74.8477 \\ 66.9141 \\ 59.0195 \\ 51.2031 \\ 43.5234 \\ 36.0625 \\ 28.9297 \\ 22.2539 \\ 16.1719 \\ 10.8281 \\ 6.3750 \\ 2.9727 \\ 0.7891 \\ 0.0000 \end{pmatrix}.$$

No se debe olvidar que los valores obtenidos para la función $y$ deben de ser divididos por el factor de rigidez $B$ con el fin de que proporcionen el valor de los descensos en su verdadera magnitud. Pueden compararse estos resultados con los obtenidos para momentos y flechas en el ejemplo descrito en § 2.4.2 comprobando que son resultados idénticos.

Para facilitar la resolución del problema, podemos escribir en forma matricial para un valor genérico de $h$:

$$A_1 M = F; \qquad A_2 Y = M$$

donde

$$A_1 = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_{N-1} \\ m_N \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} w(x_0) \\ w(x_1) \\ w(x_2) \\ w(x_3) \\ \vdots \\ w(x_{N-2}) \\ w(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

y

$$A_2 = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}.$$

### 2.5.2. Viga doblemente apoyada

Corresponde al ejemplo descrito en § 2.4.3; se trata de la viga de 6 m. con dos apoyos rígidos en sus extremos solicitada por una ley de cargas que puede venir representada por la función:

$$w(x) = \begin{cases} -x + 4, & \text{si } 0 < x < 2, \\ 1, & \text{si } 2 < x < 4, \\ -x + 7, & \text{si } 4 < x < 6. \end{cases}$$

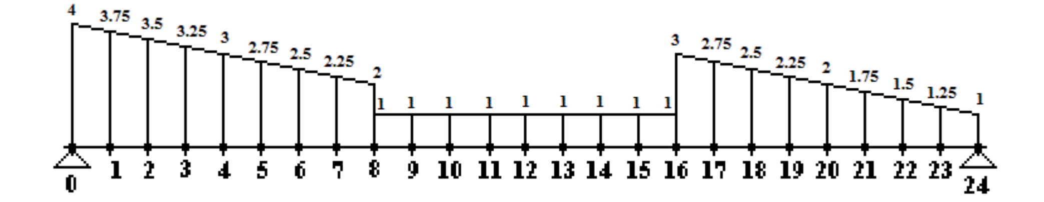



Figura 2.22

Sobre el nuevo esquema de la figura 2.22, sin puntos de red exteriores, plantearemos ahora el sistema de ecuaciones:

1ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}(m_2-2m_1+m_0) &= 3.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_3-2m_2+m_1) &= 3.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_4-2m_3+m_2) &= 3.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_5-2m_4+m_3) &= 3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_6-2m_5+m_4) &= 2.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_7-2m_6+m_5) &= 2.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_8-2m_7+m_6) &= 2.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_9-2m_8+m_7) &= 1.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{10}-2m_9+m_8) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{11}-2m_{10}+m_9) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{12}-2m_{11}+m_{10}) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{13}-2m_{12}+m_{11}) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{14}-2m_{13}+m_{12}) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{15}-2m_{14}+m_{13}) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{16}-2m_{15}+m_{14}) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{17}-2m_{16}+m_{15}) &= 2\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{18}-2m_{17}+m_{16}) &= 2.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{19}-2m_{18}+m_{17}) &= 2.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{20}-2m_{19}+m_{18}) &= 2.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{21}-2m_{20}+m_{19}) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{22}-2m_{21}+m_{20}) &= 1.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{23}-2m_{22}+m_{21}) &= 1.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(m_{24}-2m_{23}+m_{22}) &= 1.25,
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$m_0 = 0,$
$m_{24} = 0,$

2ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}(y_2-2y_1+y_0) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_3-2y_2+y_1) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_4-2y_3+y_2) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_5-2y_4+y_3) &= m_4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_6-2y_5+y_4) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_7-2y_6+y_5) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_8-2y_7+y_6) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_9-2y_8+y_7) &= m_8,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{10}-2y_9+y_8) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{11}-2y_{10}+y_9) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{12}-2y_{11}+y_{10}) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{13}-2y_{12}+y_{11}) &= m_{12},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{14}-2y_{13}+y_{12}) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{15}-2y_{14}+y_{13}) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{16}-2y_{15}+y_{14}) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{17}-2y_{16}+y_{15}) &= m_{16},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{18}-2y_{17}+y_{16}) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{19}-2y_{18}+y_{17}) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{20}-2y_{19}+y_{18}) &= m_{19},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{21}-2y_{20}+y_{19}) &= m_{20},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{22}-2y_{21}+y_{20}) &= m_{21},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{23}-2y_{22}+y_{21}) &= m_{22},\\
\tfrac{1}{0.25^2}(y_{24}-2y_{23}+y_{22}) &= m_{23},
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$y_0 = 0,$
$y_{24} = 0.$

La primera etapa es un sistema de Cramer resoluble independientemente. Ambas etapas constituyen por lo tanto sistemas resolubles sucesivamente. Podemos hallar en primer lugar los momentos y posteriormente las flechas o resolver el sistema de momentos y flechas simultáneamente.

De forma matricial, y para un valor de $h$ genérico, los sistemas los podemos escribir como:

$$AM = F; \qquad AY = M$$

donde en este caso:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ w(x_3) \\ \vdots \\ w(x_{N-2}) \\ w(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Para $h = 0.25$, las soluciones son:

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ m_{15} \\ m_{16} \\ m_{17} \\ m_{18} \\ m_{19} \\ m_{20} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ -1.5990 \\ -2.9635 \\ -4.1094 \\ -5.0521 \\ -5.8073 \\ -6.3906 \\ -6.8177 \\ -7.1042 \\ -7.2969 \\ -7.4271 \\ -7.4948 \\ -7.5000 \\ -7.4427 \\ -7.3229 \\ -7.1406 \\ -6.8958 \\ -6.5260 \\ -5.9844 \\ -5.2865 \\ -4.4479 \\ -3.4844 \\ -2.4115 \\ -1.2448 \\ 0.0000 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \\ y_{17} \\ y_{18} \\ y_{19} \\ y_{20} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 4.0677 \\ 8.0354 \\ 11.8179 \\ 15.3435 \\ 18.5534 \\ 21.4004 \\ 23.8479 \\ 25.8694 \\ 27.4468 \\ 28.5681 \\ 29.2253 \\ 29.4141 \\ 29.1341 \\ 28.3889 \\ 27.1860 \\ 25.5369 \\ 23.4568 \\ 20.9687 \\ 18.1067 \\ 14.9143 \\ 11.4438 \\ 7.7556 \\ 3.9167 \\ 0.0000 \end{pmatrix}.$$

que coinciden con las obtenidas en el ejemplo descrito en § 2.4.3.

### 2.5.3. Viga apoyada-empotrada

Corresponde al ejemplo de § 2.4.5; se trata de una viga de 6 m con un apoyo rígido en su extremo izquierdo y un empotramiento perfecto en el derecho solicitada por una ley de cargas que puede venir representada por la función:

$$w(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 3, \\ -x + 6, & \text{si } 3 < x < 6. \end{cases}$$

Sobre el nuevo esquema de la figura 2.23, con solamente un punto ficticio al otro lado del empotramiento, plantearemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rclrcl}
\frac{1}{0.25^2}(m_2 - 2m_1 + m_0) &=& 0.25, & \frac{1}{0.25^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) &=& m_1, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_3 - 2m_2 + m_1) &=& 0.5, & \frac{1}{0.25^2}(y_3 - 2y_2 + y_1) &=& m_2, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_4 - 2m_3 + m_2) &=& 0.75, & \frac{1}{0.25^2}(y_4 - 2y_3 + y_2) &=& m_3, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_5 - 2m_4 + m_3) &=& 1, & \frac{1}{0.25^2}(y_5 - 2y_4 + y_3) &=& m_4, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_6 - 2m_5 + m_4) &=& 1.25, & \frac{1}{0.25^2}(y_6 - 2y_5 + y_4) &=& m_5, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_7 - 2m_6 + m_5) &=& 1.5, & \frac{1}{0.25^2}(y_7 - 2y_6 + y_5) &=& m_6, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_8 - 2m_7 + m_6) &=& 1.75, & \frac{1}{0.25^2}(y_8 - 2y_7 + y_6) &=& m_7, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_9 - 2m_8 + m_7) &=& 2, & \frac{1}{0.25^2}(y_9 - 2y_8 + y_7) &=& m_8, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{10} - 2m_9 + m_8) &=& 2.25, & \frac{1}{0.25^2}(y_{10} - 2y_9 + y_8) &=& m_9, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{11} - 2m_{10} + m_9) &=& 2.5, & \frac{1}{0.25^2}(y_{11} - 2y_{10} + y_9) &=& m_{10}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{12} - 2m_{11} + m_{10}) &=& 2.75, & \frac{1}{0.25^2}(y_{12} - 2y_{11} + y_{10}) &=& m_{11}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{13} - 2m_{12} + m_{11}) &=& 3, & \frac{1}{0.25^2}(y_{13} - 2y_{12} + y_{11}) &=& m_{12}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{14} - 2m_{13} + m_{12}) &=& 2.75, & \frac{1}{0.25^2}(y_{14} - 2y_{13} + y_{12}) &=& m_{13}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{15} - 2m_{14} + m_{13}) &=& 2.5, & \frac{1}{0.25^2}(y_{15} - 2y_{14} + y_{13}) &=& m_{14}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{16} - 2m_{15} + m_{14}) &=& 2.25, & \frac{1}{0.25^2}(y_{16} - 2y_{15} + y_{14}) &=& m_{15}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{17} - 2m_{16} + m_{15}) &=& 2, & \frac{1}{0.25^2}(y_{17} - 2y_{16} + y_{15}) &=& m_{16}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{18} - 2m_{17} + m_{16}) &=& 1.75, & \frac{1}{0.25^2}(y_{18} - 2y_{17} + y_{16}) &=& m_{17}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{19} - 2m_{18} + m_{17}) &=& 1.5, & \frac{1}{0.25^2}(y_{19} - 2y_{18} + y_{17}) &=& m_{18}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{20} - 2m_{19} + m_{18}) &=& 1.25, & \frac{1}{0.25^2}(y_{20} - 2y_{19} + y_{18}) &=& m_{19}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{21} - 2m_{20} + m_{19}) &=& 1, & \frac{1}{0.25^2}(y_{21} - 2y_{20} + y_{19}) &=& m_{20}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{22} - 2m_{21} + m_{20}) &=& 0.75, & \frac{1}{0.25^2}(y_{22} - 2y_{21} + y_{20}) &=& m_{21}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{23} - 2m_{22} + m_{21}) &=& 0.5, & \frac{1}{0.25^2}(y_{23} - 2y_{22} + y_{21}) &=& m_{22}, \\
\frac{1}{0.25^2}(m_{24} - 2m_{23} + m_{22}) &=& 0.25, & \frac{1}{0.25^2}(y_{24} - 2y_{23} + y_{22}) &=& m_{23}, \\
 & & & \frac{1}{0.25^2}(y_{25} - 2y_{24} + y_{23}) &=& m_{24},
\end{array}$$

con la condición: $m_0 = 0$,

con las condiciones: $y_0 = 0$, $y_{24} = 0$, $y_{25} = y_{23}$.

Las dos etapas de este sistema deben ser resueltas simultáneamente. El conjunto de ambas etapas constituye aquí un solo sistema de Cramer.

Escrito matricialmente para un $h$ genérico tendremos:

$$AX = G,$$

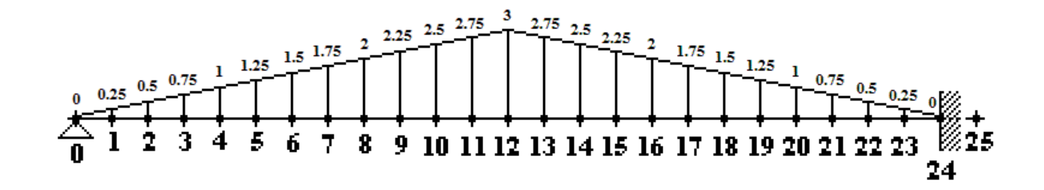



Figura 2.23

donde ahora la matriz $A$ se puede escribir como una matriz por bloques, así como los vectores $X$ y $G$, de la siguiente manera:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline -I_N & A_{22} \end{array} \right); \qquad X = \left( \begin{array}{c} M \\ \hline Y \end{array} \right); \qquad G = \left( \begin{array}{c} F \\ \hline 0 \end{array} \right)$$

siendo $I_N$ la matriz identidad de dimensión $N \times N$, $0$ denota una matriz (o un vector) con todos los elementos nulos, mientras que las matrices $A_{11} \in M_{(N-1)\times N}(\mathbb{R})$ y $A_{22} \in M_{N\times(N-1)}(\mathbb{R})$ son:

$$A_{11} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A_{22} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

y los vectores $M$, $Y$ y $F$:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{N-1} \\ m_N \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ w(x_3) \\ \vdots \\ w(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Las solución de este sistema para $h = 0.25$ es:

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ m_{15} \\ m_{16} \\ m_{17} \\ m_{18} \\ m_{19} \\ m_{20} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ -0.7733 \\ -1.5309 \\ -2.2573 \\ -2.9368 \\ -3.5538 \\ -4.0927 \\ -4.5378 \\ -4.8735 \\ -5.0843 \\ -5.1544 \\ -5.0683 \\ -4.8103 \\ -4.3648 \\ -3.7474 \\ -2.9738 \\ -2.0596 \\ -1.0203 \\ 0.1283 \\ 1.3707 \\ 2.6912 \\ 4.0742 \\ 5.5040 \\ 6.9651 \\ 8.4419 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \\ y_{17} \\ y_{18} \\ y_{19} \\ y_{20} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 2.1178 \\ 4.1873 \\ 6.1611 \\ 7.9938 \\ 9.6429 \\ 11.0700 \\ 12.2413 \\ 13.1289 \\ 13.7120 \\ 13.9773 \\ 13.9204 \\ 13.5468 \\ 12.8725 \\ 11.9254 \\ 10.7441 \\ 9.3770 \\ 7.8811 \\ 6.3214 \\ 4.7698 \\ 3.3038 \\ 2.0061 \\ 0.9629 \\ 0.2638 \\ 0.0000 \end{pmatrix},$$

que es la obtenida en el ejemplo de § 2.4.5.

### 2.5.4. Viga doblemente empotrada

Corresponde al ejemplo de § 2.4.6; se trata de la viga doblemente empotrada de 8 m con condiciones de simetría; está solicitada por la ley de cargas de envolvente parabólica $w(x) = -x^2 + 8x$.

Sobre el nuevo esquema de la figura 2.24, con solamente un punto ficticio en el empotramiento izquierdo, habiendo tenido en cuenta las condiciones de simetría en la numeración

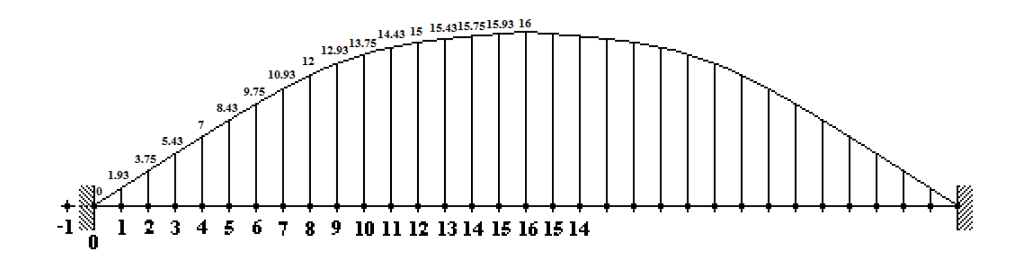



Figura 2.24

de los nodos, el sistema de ecuaciones será:

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{0.25^2}\left(m_2-2m_1+m_0\right) & = & 1.9375,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_3-2m_2+m_1\right) & = & 3.75,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_4-2m_3+m_2\right) & = & 5.4375,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_5-2m_4+m_3\right) & = & 7,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_6-2m_5+m_4\right) & = & 8.4375,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_7-2m_6+m_5\right) & = & 9.75,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_8-2m_7+m_6\right) & = & 10.9375,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_9-2m_8+m_7\right) & = & 12,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{10}-2m_9+m_8\right) & = & 12.9375,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{11}-2m_{10}+m_9\right) & = & 13.75,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{12}-2m_{11}+m_{10}\right) & = & 14.4375,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{13}-2m_{12}+m_{11}\right) & = & 15,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{14}-2m_{13}+m_{12}\right) & = & 15.4375,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{14}+m_{13}\right) & = & 17.75,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{16}-2m_{15}+m_{14}\right) & = & 15.9375,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{16}+m_{15}\right) & = & 16,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{0.25^2}\left(y_1-2y_0+y_{-1}\right) & = & m_0,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_2-2y_1+y_0\right) & = & m_1\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_3-2y_2+y_1\right) & = & m_2,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_4-2y_3+y_2\right) & = & m_3,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_5-2y_4+y_3\right) & = & m_4,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_6-2y_5+y_4\right) & = & m_5,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_7-2y_6+y_5\right) & = & m_6,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_8-2y_7+y_6\right) & = & m_7,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_9-2y_8+y_7\right) & = & m_8,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{10}-2y_9+y_8\right) & = & m_9,\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{11}-2y_{10}+y_9\right) & = & m_{10},\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{12}-2y_{11}+y_{10}\right) & = & m_{11},\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{13}-2y_{12}+y_{11}\right) & = & m_{12},\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{14}-2y_{13}+y_{12}\right) & = & m_{13},\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{14}+y_{13}\right) & = & m_{14},\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{16}-2y_{15}+y_{14}\right) & = & m_{15},\\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{16}+y_{15}\right) & = & m_{16},
\end{array}
$$

con las condiciones:
$y_0 = 0,$
$y_{-1} = y_1.$

Ambas etapas deben ser resueltas simultáneamente. Escrito de forma matricial para un valor de $h$ genérico, el sistema se puede escribir como

$$AX = G,$$

donde la matriz $A$ se puede escribir como una matriz por bloques, así como los vectores $X$ y $G$, de la siguiente manera:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline -I_{N+1} & A_{22} \end{array}\right); \qquad X = \left(\begin{array}{c} M \\ \hline Y \end{array}\right); \qquad G = \left(\begin{array}{c} F \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

siendo $I_{N+1}$ la matriz identidad de dimensión $(N+1)\times(N+1)$ (en este caso $N = \frac{1}{2}\frac{8}{h}$ debido a la simetría), 0 denota una matriz (o un vector) con todos los elementos nulos, mientras

que las matrices $A_{11} \in M_{N\times(N+1)}$ y $A_{22} \in M_{(N+1)\times N}$ son:

$$A_{11} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 2 & -2 \end{pmatrix}; \qquad A_{22} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

y los vectores $M$, $Y$ y $F$:

$$M = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{N-1} \\ m_N \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ w(x_3) \\ \vdots \\ w(x_{N-1}) \\ w(x_N) \end{pmatrix}.$$

La solución para $h = 0.25$ es:

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ m_{15} \\ m_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68.2666 \\ 57.6104 \\ 47.0752 \\ 36.7744 \\ 26.8135 \\ 17.2900 \\ 8.2939 \\ -0.0928 \\ -7.7959 \\ -14.7490 \\ -20.8936 \\ -26.1787 \\ -30.5615 \\ -34.0068 \\ -36.4873 \\ -37.9834 \\ -38.4834 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 2.1333 \\ 7.8673 \\ 16.5435 \\ 27.5181 \\ 40.1685 \\ 53.8995 \\ 68.1490 \\ 82.3926 \\ 96.1490 \\ 108.9835 \\ 120.5122 \\ 130.4048 \\ 138.3872 \\ 144.2443 \\ 147.8208 \\ 149.0234 \end{pmatrix},$$

que es la misma que la obtenida en el ejemplo de § 2.4.6.

# NOTAS

# NOTAS

**CUADERNO**




Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

